

# THERMODYNAMIQUE DE L'ÉCOULEMENT DIPHASIQUE COMPRESSIBLE À DEUX CONSTITUANTS DE FANNO

A. ATTOU\*

Université catholique de Louvain<sup>1</sup>

Le comportement d'un fluide diphasique gaz-liquide lors d'un écoulement adiabatique à travers une conduite de section constante est étudié, dans cet article, du point de vue thermodynamique. En admettant le mélange diphasique homogène, le traitement des lois physiques de conservation permet de déduire analytiquement l'équation d'évolution du fluide et la manière dont celle-ci s'écarte de l'évolution isotherme. Sur les bases de la forme différentielle de cette équation et du second principe de la thermodynamique, les propriétés de cet écoulement sont discutées.

La détermination de la limite de Fanno a permis de mettre en évidence l'existence d'une longueur maximale de conduite au-delà de laquelle l'écoulement considéré n'est plus possible. Cette longueur maximale est fonction du titre massique et des conditions initiales, c'est-à-dire les variables d'état et la vitesse à l'entrée. La cohérence des résultats est vérifiée en appliquant systématiquement ceux-ci à l'écoulement d'un gaz parfait.

Cette théorie permet de comprendre et de justifier l'existence d'états d'écoulement dits multicritiques pour lesquels un formalisme physique est proposé. Elle est appliquée à des écoulements diphasiques à travers les circuits de décharge comportant des singularités géométriques telles que des élargissements brusques. Le présent modèle, basé sur le formalisme proposé pour la multicriticité, est validé au moyen de données expérimentales obtenues pour des relâchements quasi stationnaires d'azote pur et de mélange eau-azote à travers une ligne de décharge complexe comportant plusieurs élargissements brusques en cascade. Prédites par le modèle, la configuration critique et les valeurs du débit maximum et des variables de l'écoulement (pression et température) à travers la ligne de décharge s'accordent avec succès avec les résultats expérimentaux.

## THERMODYNAMIC OF TWO-PHASE TWO COMPONENT COMPRESSIBLE FANNO TYPE FLOW

The behaviour of an adiabatic two-phase gas-liquid flow through a duct with a constant cross-sectional area is studied from a thermodynamics point of view. By assuming the two-phase mixture as homogeneous, the treatment of the physical conservation laws makes it possible to obtain an analytical equation of the fluid evolution which expresses the difference between the Fanno and the isothermal evolutions. On the basis of its differential form and the second principle of thermodynamic, the properties of this flow are discussed.

(1) 2, place du Levant,  
1348 Louvain-la-Neuve - Belgique

\* Adresse actuelle :  
Centre technologique international Terre et Pierre,  
55, chaussée d'Antoing,  
7500 Tournai - Belgique

The determination of the Fanno limit shows the existence of a maximum length of the duct. For a length greater than this maximum one, the flow is no more possible. One shows that this maximum length is a function of the mass quality as well as the initial conditions, i.e. the inlet state variables and the inlet velocity. The results are systematically verified by considering the limit of a single phase ideal gas flow.

The theory allows to understand and to justify the existence of the so-called multichoked flow. It is applied to the two-phase flow through discharge lines involving geometrical singularities (sudden enlargement for example). The proposed model is validated on the basis of experimental data obtained for quasi steady-state discharges of pure nitrogen and water-nitrogen mixture through a complex pressure relief line involving several abrupt enlargements. The critical configuration and the maximum mass flowrate as well as the variables of the flow (pressure and temperature) predicted from the model are in good agreement with the experimental results.

#### TERMODINÁMICA DEL FLUJO DIFÁSICO COMPRESIBLE DE DOS COMPONENTES DE FANNO

El comportamiento de un fluido difásico gas-líquido durante un flujo adiabático a través de un conducto de sección constante se ha estudiado desde el punto de vista termodinámico. Admitiendo la mezcla difásica homogénea, el tratamiento de las leyes físicas de conservación permite deducir analíticamente la ecuación de evolución del fluido y la forma en que la misma se diferencia de la evolución isoterma. Con arreglo a los fundamentos de la forma diferencial de esta ecuación y del segundo principio de la termodinámica, se ponen en discusión las propiedades de semejante flujo.

La determinación del límite de Fanno ha permitido hacer resaltar la existencia de una longitud máxima de conducto por encima de la cual el flujo considerado deja de ser posible. Esta longitud máxima depende del título másico y de las condiciones iniciales, o sea las variables de estado y la velocidad de entrada. La coherencia de los resultados se verifica aplicando sistemáticamente éstos al flujo de un gas perfecto.

Esta teoría permite comprender y justificar la existencia de estados de flujos denominados multicríticos, para los cuales se propone un formalismo físico. Esta teoría tiene aplicación para los flujos difásicos a través de los circuitos de descarga que incluyen puntos singulares geométricos, como, por ejemplo, ensanchamientos bruscos. El presente modelo, fundado en el formalismo propuesto para la multicriticidad, se ha validado por medio de datos experimentales obtenidos para las descargas casi estacionarias de nitrógeno puro y de mezclas de agua-nitrógeno a través de una línea de descarga compleja que consta de varios ensanchamientos bruscos en cascada. La configuración crítica y los valores del caudal máximo y de las variables del flujo (presión y temperatura) a través de la línea de descarga predichas por el modelo, están perfectamente en concordancia con los resultados experimentales.

## INTRODUCTION

Les lignes de décharge, reliant un réservoir amont contenant un fluide sous pression à un réservoir aval à plus basse pression, jouent un rôle important dans la sécurité des installations industrielles. On cherche souvent à prévoir le débit massique évacué lors d'un scénario de dépressurisation prévu ou accidentel [1] et [2]. Ce débit massique est généralement critique étant donné la valeur élevée de la différence de pression entre les réservoirs amont et aval. Les méthodes actuelles de calcul d'écoulement critique se basent sur l'hypothèse consistant à assimiler la section critique, supposée unique, à la plus petite section géométrique de passage de l'écoulement entre les deux réservoirs [3-6]. Cependant, ces circuits renferment souvent des conduites de diamètres différents reliées par des changements brusques de section. Dans ces conditions, cette hypothèse n'est plus acceptable et peut conduire à des estimations erronées du débit critique. Une analyse de résultats expérimentaux obtenus pour des écoulements diphasiques eau-vapeur à travers un circuit comportant un élargissement brusque a démontré effectivement l'existence d'un état doublement critique [7]. Il en est de même des données non publiées obtenues au laboratoire DNV [8], sur des écoulements monophasiques gazeux et diphasiques gaz-liquide à travers un circuit comportant des élargissements brusques en cascade.

Pour modéliser correctement ces écoulements, il est nécessaire de prévoir leurs configurations critiques et donc de comprendre les conditions d'apparition de ce phénomène. On est alors amené à rétablir les bases thermodynamiques qui régissent l'écoulement diphasique adiabatique à travers une conduite de section constante, l'hypothèse d'adiabaticité étant satisfaite dans de nombreux problèmes pratiques. Les résultats seront ensuite appliqués à un circuit simple comportant deux conduits joints par un élargissement brusque afin de discuter de l'existence d'états multicritiques.

## 1 MODÈLE D'ÉCOULEMENT GAZ-LIQUIDE

On considère un écoulement diphasique compressible unidimensionnel en régime permanent à travers une conduite de section constante (fig. 1). On se propose de développer un modèle basé sur les hypothèses simplificatrices énumérées ci-après.

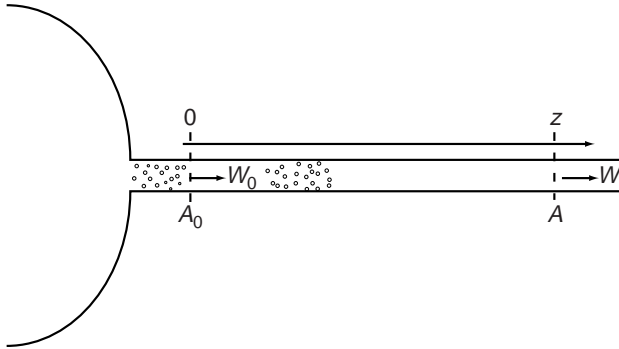


Figure 1  
Écoulement diphasique à travers une conduite droite.  
*Two-phase flow through a straight duct.*

### 1.1 Hypothèses de base et formulation du modèle d'écoulement gaz-liquide

- H1 : la conduite est disposée horizontalement, ce qui permet de simplifier les développements analytiques en négligeant le terme de gravité par rapport aux autres contributions.
- H2 : l'écoulement est cinétiquement homogène c'est-à-dire que les moyennes des vitesses de chaque phase dans la section du conduit sont égales :  $W_L = W_G = W$ . Pour des écoulements à phases dispersées à travers des conduites horizontales, le rapport des vitesses phasiques reste proche de l'unité. Il est de l'ordre de 1,1 à 1,2 pour la structure à bulles [9]. Par ailleurs, la tendance à l'homogénéisation de l'écoulement est d'autant plus prononcée que la vitesse moyenne de celui-ci est élevée [10]. Cette approximation est donc satisfaisante car l'état de l'écoulement est proche de la criticité.
- H3 : le mélange diphasique est en équilibre thermique, c'est-à-dire que les températures de chaque phase sont égales :  $T_L = T_G = T$ . L'équilibre thermique est d'autant mieux satisfait que la densité d'aire interfaciale est importante. Dans ces conditions, le bon contact thermique entre les phases permet de négliger les effets attribués à la différence des capacités calorifiques des deux fluides.
- H4 : le transfert interfacial de masse est supposé nul. Le titre massique  $x$  est donc invariable au cours de l'écoulement.
- H5 : la compressibilité du mélange est uniquement due à la phase gazeuse. La masse volumique du liquide est supposée constante et celle du gaz varie en fonction de la pression et de la température selon la loi des gaz parfaits :
 
$$\rho_L = \text{const} \quad \text{et} \quad \rho_G = \frac{p}{R \cdot T}$$
 où  $R$  est la constante des gaz parfaits. Pour les variations de pression et de température qui sont couramment observées pour le fluide au cours de l'écoulement, les effets de compressibilité et de dilatation du liquide restent négligeables par rapport à ceux relatifs à la phase gazeuse. Par ailleurs, l'hypothèse de gaz parfait permet, dans une première approche, de conduire des calculs analytiques simples tout en assurant une précision raisonnable pour des valeurs de la pression pas trop proches de la pression critique thermodynamique.
- H6 : l'écoulement est supposé adiabatique. Cette hypothèse est généralement satisfaite dans de nombreux problèmes pratiques de transport de fluides. Néanmoins, elle risque de devenir approximative pour le cas des longues conduites dans lesquelles s'écoule un fluide dont la température dans le réservoir amont s'écarte d'une manière significative de celle du milieu ambiant. On va exclure ce cas pour lequel le mécanisme de transfert de chaleur par convection externe doit être pris en considération.
- H7 : les coefficients de corrélation spatiaux sont choisis égaux à l'unité, c'est-à-dire que pour toutes les grandeurs locales  $f$  et  $g$ , on peut écrire  $\langle fg \rangle = \langle f \rangle \cdot \langle g \rangle$  où  $\langle \rangle$  est l'opérateur de moyenne de surface. Cette hypothèse, qui consiste à négliger les effets de profils, est d'autant mieux satisfaite que les phases sont mutuellement dispersées et le régime turbulent. Dans ces conditions, les profils des vitesses phasiques et du taux de vide peuvent être considérés, en première approximation, comme uniformes. Le cas des configurations d'écoulements à phases séparées (structures annulaire et stratifiée) sera donc exclu car l'hétérogénéité du taux de présence d'une phase sur une section du conduit devient significative. Par la suite, on omettra le symbole de moyenne pour alléger l'écriture.

En tenant compte de ces hypothèses, le modèle d'écoulement du fluide est régi par les équations différentielles suivantes :

– conservation de la masse de la phase gazeuse :

$$\frac{d}{dz}(\alpha \rho_G W) = 0 \quad (1a)$$

– conservation de la masse de la phase liquide :

$$\frac{d}{dz}((1-\alpha)\rho_L W) = 0 \quad (1b)$$

– conservation de la quantité de mouvement du mélange :

$$(\alpha \rho_G + (1-\alpha)\rho_L)W \frac{dW}{dz} + \frac{dp}{dz} = -\frac{4\tau_p}{D} \quad (1c)$$

dans laquelle  $\tau_p$  est la contrainte de cisaillement pariétale et  $D$  est le diamètre de la conduite ;

– conservation de l'énergie totale du mélange :

$$\begin{aligned} \alpha \rho_G W \frac{d}{dz} \left( h_G + \frac{1}{2} W^2 \right) \\ + (1-\alpha)\rho_L W \frac{d}{dz} \left( h_L + \frac{1}{2} W^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (1d)$$

dans laquelle  $h_G$  et  $h_L$  sont respectivement l'enthalpie massique de la phase gazeuse et de la phase liquide.

## 1.2 Équation constitutive du mélange

Si l'on affecte d'un indice 0 les grandeurs relatives à un état de référence de l'écoulement, les relations (1a) et (1b) de conservation de la masse de chaque phase s'écrivent respectivement sous la forme intégrale :

$$\alpha \rho_G W A = \alpha_0 \rho_{G0} W_0 A_0 \quad (2a)$$

$$(1-\alpha)\rho_L W A = (1-\alpha_0)\rho_{L0} W_0 A_0 \quad (2b)$$

où  $A$  est une section droite courante de l'écoulement et  $\alpha$  le taux de vide global, défini comme la fraction de la section droite  $A$  occupée en moyenne dans le temps par la phase gazeuse.

La division membre à membre des équations précédentes conduit, en vertu de l'hypothèse H5, à l'expression :

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{1}{\alpha_0 + (1-\alpha_0) \frac{p/p_0}{T/T_0}} \quad (3)$$

qui représente l'équation constitutive du mélange diphasique homogène. Elle reste valable pour une conduite de géométrie quelconque et constitue une liaison entre le taux de vide global, le rapport des pressions et le rapport des températures.

Dans le cas d'un écoulement isotherme ( $T/T_0 = 1$ ), on a représenté sur la figure 2 le rapport du taux de vide en fonction du rapport de pression pour différents niveaux du taux de vide global  $\alpha_0$ . La détente du mélange en écoulement ( $p/p_0 < 1$ ) s'accompagne d'une croissance du taux de vide global induite par la détente de la phase gazeuse. La récupération de pression ( $p/p_0 > 1$ ) s'accompagne d'une décroissance du taux de vide global induite par la compression de la phase gazeuse. Le réseau d'hyperboles montre que l'influence du rapport de pression est d'autant plus importante que le taux de vide est faible. Pour des mélanges dispersés à faible teneur en liquide, les variations relatives du taux de vide global restent faibles et peu influencées par le rapport de pression.

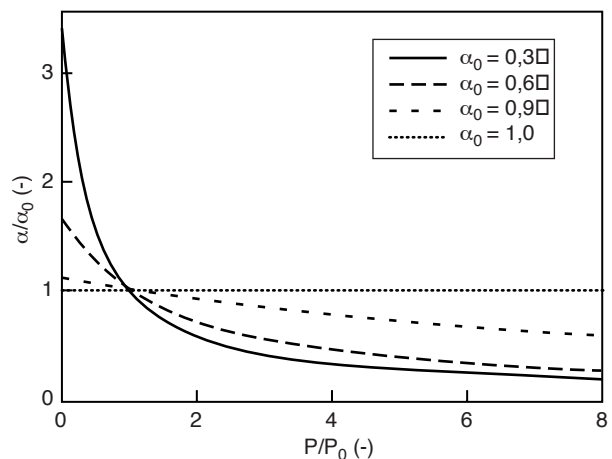


Figure 2

Courbe d'état du mélange gaz-liquide lors d'une évolution isotherme.

*State curve of the gas-liquid mixture flow during isothermal evolution.*

### 1.3 Condition de criticité

Pour exprimer la condition de criticité locale de l'écoulement, on se base sur le système (1a) à (1d) des moyennes des équations de conservation locales dans la section droite de la conduite.

Celle-ci a été supposée constante mais la généralisation à une conduite de section variable ne présente aucune difficulté. D'autre part, la condition de criticité étant indépendante de la gravité, l'inclinaison de la conduite n'a aucune importance.

En adoptant comme variables la température et la pression, les dérivées des enthalpies massiques phasiques s'écrivent comme suit :

$$\frac{dh_K}{dz} = \left( \frac{\partial h_K}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dz} + \left( \frac{\partial h_K}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dz} \quad \text{avec } K = G, L \quad (4a)$$

En vertu de l'hypothèse H5, on a :

- pour la phase gazeuse :

$$\left( \frac{\partial h_G}{\partial p} \right)_T = 0 \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial h_G}{\partial T} \right)_p = c_{pG} \quad (4b)$$

où  $c_{pG}$  est la chaleur massique à pression constante du gaz ;

- pour la phase liquide :

$$\left( \frac{\partial h_L}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho_L} - T \left( \frac{\partial 1/\rho_L}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{\rho_L} \quad (4c)$$

et  $\left( \frac{\partial h_L}{\partial T} \right)_p = c_{pL}$

où  $c_{pL}$  est la chaleur massique à pression constante du liquide.

En choisissant  $p$ ,  $T$ ,  $W$  et  $\alpha$  comme variables de l'écoulement et en tenant compte des relations (4a) à (4c), le système d'équations (1a) à (1d) se présente sous la forme synthétique suivante :

$$\overline{\overline{M}}(\overline{X}) \frac{d\overline{X}}{dz} = \overline{B}(\overline{X}) \quad (5)$$

où  $\overline{X} = (p, T, W, \alpha)$  est le vecteur des variables dépendantes choisies,  $\overline{\overline{M}}$  est la matrice caractéristique du système et  $\overline{B}$  est le vecteur des termes aux seconds membres des équations (sources extérieures).

La condition nécessaire de criticité qui est associée au blocage du débit massique s'explique en annulant le déterminant de la matrice caractéristique  $\overline{\overline{M}}$  ([11-13]) :

$$\det(\overline{\overline{M}}) = 0 \quad (6)$$

On définit les paramètres sans dimension suivants :

$$\gamma = \frac{c_{pG}}{c_{vG}} \quad \text{et} \quad \kappa = \frac{c_{pL}}{c_{pG}}$$

où  $c_{vG}$  est la chaleur massique à volume constant de la phase gazeuse ;

$$\omega = \frac{W}{a_S} \quad \text{avec} \quad a_S = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{\left( \frac{\partial p}{\partial \rho_G} \right)_{S_G}}$$

est la vitesse du son isentropique d'un gaz parfait ;

$$\frac{1}{\Lambda} = \frac{x}{\gamma - \frac{(\gamma-1)x}{1 + (1-x) \cdot (\kappa-1)}} \quad \left( 0 \leq \frac{1}{\Lambda} \leq 1 \right)$$

En utilisant ces paramètres, le développement de la condition (6) conduit à l'équation :

$$\Lambda \omega^2 \alpha^2 = 1 \quad (7)$$

Si l'on définit un nombre de Mach effectif du mélange par  $Me \equiv \sqrt{\Lambda} \cdot \omega \alpha$ , la condition de criticité (7) devient  $Me = 1$ , similaire à celle rencontrée en dynamique des gaz.

La relation (7) lie les variables de l'écoulement dans une certaine section, dite critique, où la vitesse du mélange s'identifie à la vitesse locale du son. Celle-ci est fournie au sens du modèle par la formule suivante :

$$V_{son} = \frac{a_S}{\sqrt{\Lambda} \cdot \alpha} \quad (8)$$

Le paramètre  $\Lambda$  est une caractéristique de la nature du mélange et de sa composition massique en admettant que les chaleurs massiques phasiques restent constantes.

En éliminant le titre massique apparaissant dans l'équation (8) à l'aide de la relation suivante entre  $\alpha$ ,  $x$  et  $\beta = \rho_L / \rho_G$  :

$$\frac{1-x}{x} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \beta$$



on obtient une formule de la vitesse du son qui fait apparaître  $a_S$  et le taux de vide global  $\alpha$  :

$$\frac{V_{son}}{a_S} = \sqrt{\frac{(\alpha + \kappa\beta(1 - \alpha))}{(\alpha + \beta(1 - \alpha)) \cdot (\alpha + \kappa\beta\gamma(1 - \alpha)) \cdot \alpha^2}} \quad (9)$$

Compte tenu des hypothèses du modèle, la vitesse  $V_{son}$  satisfait bien aux conditions aux limites monophasiques. En effet, en écoulement monophasique gazeux ( $\alpha = x = 1$ ), le paramètre  $\Lambda$  devient égal à l'unité et l'équation (9) (ou (8)) se réduit à  $V_{son} = a_S$ . En écoulement monophasique liquide ( $\alpha = x = 0$ ), le paramètre  $\Lambda \rightarrow \infty$ , et donc l'équation (9) prévoit une vitesse du son tendant vers l'infini avec un comportement en :

$$\frac{a_S}{\sqrt{\gamma\beta\alpha}}$$

La singularité de la vitesse du son qui apparaît en  $\alpha = 0$  est directement liée à l'hypothèse d'incompressibilité de la phase liquide (H5). En effet, une petite perturbation de la pression  $p$  se propage dans un milieu continu de masse volumique  $\rho$  avec une vitesse locale donnée par :

$$\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$$

La perturbation se propagera à une vitesse infinie si le milieu est parfaitement rigide, ce qui est le cas du liquide supposé incompressible.

Le rapport  $V_{son}/a_S$  calculé par l'équation (9) est représenté sur la figure 3 en fonction du taux de vide global pour différentes valeurs de  $\beta$ . Le calcul est effectué pour le mélange eau-air :  $\gamma = 1,4$  et  $\kappa = 4,15$ . Pour un rapport de masse volumique fixé, la vitesse du son diminue très rapidement à droite du point singulier  $\alpha = 0$ . En effet, la présence de petites bulles de gaz amortit considérablement la vitesse de propagation de l'onde élastique. Celle-ci devient, déjà pour des faibles taux de vide, plus petite que la vitesse du son isentropique d'un gaz parfait. La décroissance de  $V_{son}$  est de plus en plus lente lorsque le taux de vide  $\alpha$  croît. Un minimum est atteint au voisinage d'une valeur de  $\alpha$  de l'ordre de 0,6 qui semble peu dépendre de  $\beta$ . Au-delà de cette valeur, la vitesse du son augmente de plus en plus rapidement pour atteindre la valeur  $a_S$  en  $\alpha = 1$ .

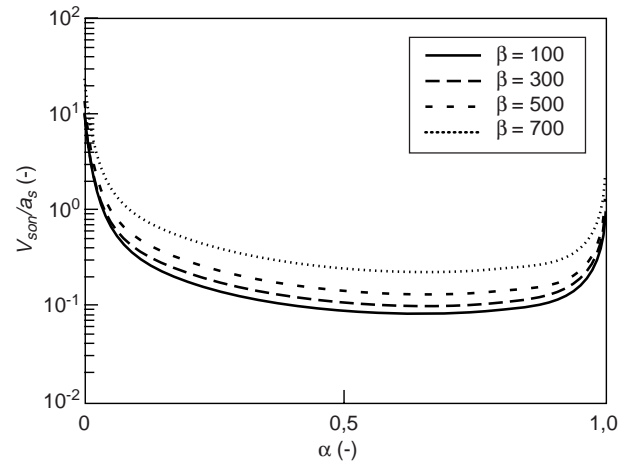


Figure 3

Vitesse du son dans un mélange gaz-liquide homogène.

*Sound velocity in a homogenous gas-liquid mixture.*

L'allure de la caractéristique  $V_{son}(\alpha)$  présente un pseudo-plateau s'étalant sur un intervalle de taux de vide relativement important et correspondant à une vitesse nettement plus faible que  $a_S$ .

## 2 ÉCOULEMENT DIPHASIQUE À DEUX CONSTITUANTS DE FANNO

Nous allons analyser l'écoulement adiabatique d'un mélange gaz-liquide compressible en régime permanent à travers une conduite de section constante (fig. 1). Cet écoulement est supposé satisfaire aux hypothèses H1 à H7.

### 2.1 Équation de l'évolution de Fanno du mélange gaz-liquide

L'écoulement adiabatique d'un fluide compressible dans une conduite de section constante est appelé écoulement de Fanno. L'évolution particulière subie par le fluide est appelée évolution de Fanno. Cette évolution n'est pas isentropique dans la mesure où le fluide est soumis, au cours de son écoulement, à la dissipation mécanique occasionnée par le frottement visqueux. L'objet de ce qui suit est de caractériser cette évolution dans le cas d'un mélange gaz-liquide en se basant sur le premier principe de la thermodynamique.

L'équation de conservation de la masse, qui exprime qu'à travers chaque section  $A$  d'une conduite passe le

même débit massique  $M$ , s'obtient en combinant les formes intégrales des équations (1a) et (1b) :

$$\rho_H W = \rho_{H0} W_0 = \frac{M}{A} \equiv G \quad (10)$$

où  $G$  est la vitesse massique, et

$$\rho_H = \left( \frac{x}{\rho_G} + \frac{(1-x)}{\rho_L} \right)^{-1}$$

est la masse volumique moyenne du mélange. Par ailleurs, l'équation de conservation de l'énergie totale exprimant que, pour un écoulement adiabatique, l'enthalpie totale du mélange est invariable s'obtient en intégrant l'équation (1d) entre la section de référence  $A_0$  et la section courante  $A$  :

$$h_m + \frac{W^2}{2} = h_{m0} + \frac{W_0^2}{2} \quad (11)$$

expression dans laquelle  $h_m \equiv xh_G + (1-x)h_L$  est l'enthalpie massique moyenne du mélange.

Les équations (10) et (11) caractérisent l'évolution de Fanno pour le mélange gaz-liquide. En développant les termes enthalpiques au moyen des identités (4b) et (4c), l'équation (11) se ramène à la forme suivante :

$$C_{pm}(T - T_0) + (1-x) \frac{(p - p_0)}{\rho_L} = \frac{(W^2 - W_0^2)}{2} \quad (12)$$

où par définition  $c_{pm} \equiv xc_{pG} + (1-x)c_{pL}$  est une chaleur massique à pression constante.

Compte tenu de l'identité suivante :

$$\frac{c_{pm}}{R} = \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) (1 + (1-x)(\kappa - 1))$$

de l'équation d'état des gaz parfaits et en éliminant les termes de vitesses dans (12) au moyen de l'équation (10), l'expression (12) devient :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) (1 + (1-x)(\kappa - 1)) \left( \frac{p}{\rho_H} - \frac{p_0}{\rho_{H0}} \right) \\ & + (1-x) \frac{(p - p_0)}{\rho_L} \left[ x - \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) (1 + (1-x)(\kappa - 1)) \right] \\ & = x \frac{G^2}{2} \left( \frac{1}{\rho_{H0}^2} - \frac{1}{\rho_H^2} \right) \end{aligned}$$

En posant la constante :

$$\Pi \equiv \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{G^2}{2} \frac{x}{1 + (1-x)(\kappa - 1)} = \frac{G^2}{2} \left( 1 - x \frac{\Lambda}{\gamma} \right) \quad (13)$$

la relation précédente devient :

$$\begin{aligned} & \frac{p}{\rho_H} \left[ 1 + \frac{\Pi}{p\rho_H} + (1-x) \left( \frac{2\Pi}{G^2} - 1 \right) \frac{\rho_H}{\rho_L} \right] = \text{Cst}_0 \\ & = \frac{p_0}{\rho_{H0}} \left[ 1 + \frac{\Pi}{p_0\rho_{H0}} + (1-x) \left( \frac{2\Pi}{G^2} - 1 \right) \frac{\rho_{H0}}{\rho_L} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

C'est l'équation de l'évolution de Fanno pour le mélange diphasique gaz-liquide de titre massique  $x$ . Pour mieux comprendre dans quelle mesure cette transformation peut s'écarter de l'évolution isotherme, il est préférable de mettre en évidence la masse volumique du gaz dans l'expression (14). On obtient alors, après quelques développements, l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{p}{\rho_G} \left[ 1 + \frac{\Pi}{p\rho_G} \left( 1 + \frac{1-x}{x} \frac{\rho_G}{\rho_L} \right)^2 + \frac{2\Pi}{G^2} \frac{1-x}{x} \frac{\rho_G}{\rho_L} \right] = \text{Cst}_0 \quad (15)$$

Le premier membre de cette équation fait apparaître deux facteurs.

Le premier facteur  $\frac{p}{\rho_G}$  est proportionnel à  $T$  en vertu de l'équation d'état des gaz parfaits. Le second facteur entre crochets exprime, dès lors, l'écart de l'évolution par rapport à l'isotherme. Il renferme trois termes. Comme :

$$\frac{2\Pi}{G^2} \frac{1-x}{x} = O(1)$$

le troisième terme est de l'ordre de  $\frac{\rho_G}{\rho_L}$ . Il est donc petit comparé à l'unité pour des pressions pas trop élevées. D'autre part, en remarquant que :

$$\frac{\Pi}{p\rho_G} = \left( \frac{\gamma - 1}{2} \right) \frac{Me^2}{x + (1-x)\gamma\kappa}$$

on constate que le second terme est de l'ordre de  $Me^2$ . Il devient petit comparé à l'unité lorsque la vitesse de l'écoulement est petite par rapport à la vitesse du son  $V_{son}$ .

Par conséquent, l'équation de l'évolution de Fanno montre que lorsque le niveau de la pression n'est pas

trop élevé ( $\rho_G/\rho_L \ll 1$ ) et que la vitesse du mélange est petite comparée à la vitesse du son, l'évolution de Fanno s'écarte peu de l'évolution isotherme et ce quel que soit le titre massique. Pour des écoulements diphasiques à grande vitesse, la transformation peut donc s'écarter de l'isotherme d'une manière significative. Il est intéressant de noter que, dans le cas d'un écoulement monophasique gazeux, l'équation (14) se réduit à :

$$\frac{p}{\rho_G} \left(1 + \frac{\Pi}{p\rho_G}\right) = \text{Cst}_0 = \frac{p_0}{\rho_{G0}} \left(1 + \frac{\Pi}{p_0\rho_{G0}}\right)$$

avec :

$$\Pi = \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) Ma^2 \text{ et } Ma = W/a_s$$

le nombre de Mach de l'écoulement gazeux. On retrouve ainsi l'équation de l'évolution de Fanno du gaz parfait [14].

## 2.2 Propriétés de l'évolution de Fanno du mélange gaz-liquide

À cause du frottement visqueux, le fluide subit au cours de son écoulement une évolution irréversible. L'augmentation d'entropie qui est associée à cette évolution est attribuée exclusivement à ces effets de dissipation mécanique.

En effet, les phases étant supposées localement à la même température, l'échange de chaleur entre elles ne contribue pas à la croissance d'entropie du fluide. Dans ce qui suit, nous allons caractériser l'évolution de Fanno en se basant sur le second principe de la thermodynamique.

Afin de faciliter la discussion sur les propriétés de l'évolution subie par le fluide, il est préférable de ramener l'équation algébrique (14) de l'évolution sous une forme différentielle. La différentiation de chaque membre de l'équation (14) conduit à :

$$\left(1 + \frac{2\Pi}{p\rho_H}\right) \frac{d\rho_H}{\rho_H} = \left[1 + (1-x) \frac{\rho_H}{\rho_L} \left(\frac{2\Pi}{G^2} - 1\right)\right] \cdot \frac{dp}{p} \quad (16a)$$

D'autre part, sur la base de l'équation d'état des gaz parfaits, on peut écrire :

$$\frac{d\rho_G}{\rho_G} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T} = \left(1 + \frac{1-x}{x} \frac{\rho_G}{\rho_L}\right) \frac{d\rho_H}{\rho_H} \quad (16b)$$

En combinant les relations (16a) et (16b), on trouve successivement :

$$\frac{dT}{T} = \left[ \frac{\frac{\gamma-1}{1+\frac{1-x}{x}\gamma\kappa} Me^2 - \frac{2\Pi}{G^2}(1-\alpha)}{\alpha + \frac{2\Pi}{G^2}(1-\alpha)} \right] \cdot \alpha \frac{d\rho_H}{\rho_H} \quad (17)$$

liant les variables  $T$  et  $\rho_H$  et

$$\frac{dT}{T} = \left[ \frac{\frac{\gamma-1}{1+\frac{1-x}{x}\gamma\kappa} Me^2 - \frac{2\Pi}{G^2}(1-\alpha)}{\alpha + \frac{\gamma-1}{1+\frac{1-x}{x}\gamma\kappa} Me^2} \right] \cdot \frac{dp}{p} \quad (18)$$

liant les variables  $T$  et  $p$ .

Puisque le nombre de Mach effectif  $Me$  et le taux de vide global  $\alpha$  dépendent de l'état du mélange, ces deux dernières équations ne peuvent pas être directement intégrées.

La variation d'entropie du mélange lors d'une évolution infinitésimale est évaluée en appliquant le second principe à chaque phase :

$$dh_G = T ds_G + \frac{RT}{p} dp \quad (19a)$$

$$dh_L = T ds_L + \frac{dp}{\rho_L} \quad (19b)$$

En vertu des relations constitutives (4b) et (4c), les équations (19a) et (19b) deviennent respectivement :

$$ds_G = c_{pG} \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \quad (20a)$$

$$ds_L = c_{pL} \frac{dT}{T} \quad (20b)$$

En combinant les relations (20a) et (20b), on trouve la variation élémentaire d'entropie du mélange :

$$ds = c_{pm} \frac{dT}{T} - xR \frac{dp}{p} \quad (21)$$



En tenant compte de l'équation (14) de l'évolution, des expressions (17) et (18) ainsi que de la définition du paramètre  $\Pi$  (éq. (13)), la relation (21) devient, en choisissant  $s$  et  $\rho_H$  comme variables :

$$ds = - \frac{xc_{vG}(\gamma - 1)(1 - Me^2)}{\alpha \left( \alpha + \frac{2\Pi}{G^2}(1 - \alpha) \right)} \frac{d\rho_H}{\rho_H} \quad (22)$$

Les égalités (17) et (18) expriment qu'il peut exister un taux de vide global pour lequel la température devient extremum. Ce taux de vide  $\alpha^*$  est obtenu en posant  $dT = 0$  :

$$\alpha^* = 1 - \left( \frac{x\gamma + \gamma\kappa(1 - x)}{x + \gamma\kappa(1 - x)} \right) Me^2 \quad (23a)$$

Comme le taux de vide est compris entre 0 et 1, la valeur particulière  $\alpha^*$  ne peut exister physiquement que pour un nombre de Mach effectif suffisamment faible, inférieur à la valeur limite  $Me^*$  :

$$0 < Me \leq Me^* = \sqrt{\frac{x + \gamma\kappa(1 - x)}{x\gamma + \gamma\kappa(1 - x)}} < 1 \quad (23b)$$

En raison du travail de dissipation mécanique, l'évolution de Fanno ne peut avoir lieu que dans le sens d'un accroissement de l'entropie puisque le régime est adiabatique (second principe de la thermodynamique),  $ds > 0$ . L'expression (22) conduit alors à distinguer deux cas : le régime subcritique et le régime supercritique.

### 2.2.1 Le régime subcritique : $1 - Me^2 > 0$

Compte tenu de l'expression (22), l'évolution du fluide se produit dans le sens de la décroissance de la masse volumique moyenne du mélange ( $d\rho_H < 0$ ). Pour satisfaire à la conservation du débit massique (éq. (10)), on doit avoir  $dW > 0$ . L'écoulement est donc accéléré. Deux cas peuvent alors être envisagés :

–  $Me \leq Me^*$  : la température présente un extremum pour un taux de vide égal à  $\alpha^*$ . Dès lors, selon la valeur du taux de vide :

a)  $\alpha > \alpha^*(Me)$  : compte tenu des équations (17) et (18), on a respectivement  $dT < 0$  et  $dp < 0$ . La détente du mélange s'accompagne d'une diminution de la température.

b)  $\alpha < \alpha^*(Me)$  : compte tenu des équations (17) et (18), on a respectivement  $dT > 0$  et  $dp < 0$ . La détente du mélange s'accompagne d'une augmentation de la température.

L'extremum considéré est donc un maximum.

–  $Me > Me^*$  : la température ne présente aucun extremum. On est ramené au cas précédent (a).

### 2.2.2 Le régime supercritique : $1 - Me^2 < 0$

Compte tenu de l'expression (22), l'évolution du fluide se produit dans le sens de la croissance de la masse volumique moyenne du mélange ( $d\rho_H > 0$ ). Pour satisfaire à la conservation du débit massique (éq. (10)), on doit avoir  $dW < 0$ . L'écoulement est donc décéléré. La condition (23b) n'est jamais satisfaite. Dès lors, la température ne présente aucun extremum.

Néanmoins, quel que soit le régime, la condition (22) déduite du second principe exprime que l'entropie du fluide ne peut croître indéfiniment. Il existe un point limite où l'entropie atteint sa valeur maximale. En ce point, la condition  $1 - Me^2 = 0$  est satisfaite : c'est la condition de criticité (éq. (7)). Au-delà de ce point, l'écoulement considéré n'est plus possible. Ce point constitue la limite de l'évolution de Fanno.

## 3 LIMITE DE FANNO D'UN ÉCOULEMENT DIPHASIQUE À DEUX CONSTITUANTS

Nous nous proposons, dans ce paragraphe, de caractériser la limite de l'évolution de Fanno et de démontrer que cette limite est associée à une longueur de conduite maximale. Une expression analytique de cette longueur maximale sera obtenue.

La pression diminue le long de la conduite à cause des contraintes de cisaillement pariétales. Il en résulte des modifications du taux de vide en vertu de l'équation constitutive du mélange (éq. (3)). Celles-ci conduisent à une variation de la masse volumique moyenne du mélange qui influence à son tour la vitesse de l'écoulement. Dès lors, le problème posé est le suivant : étant donné le titre massique  $x$  et les grandeurs à l'état de référence ( $p_0, T_0, W_0$ ) dans une section particulière de la conduite  $A_0$ , on cherche à évaluer les variables dans une section quelconque  $A$ . La résolution de ce problème permettra de déterminer la longueur de conduite maximale associée à la limite de Fanno d'un écoulement gaz-liquide à deux constituants.

Pour résoudre le problème posé, le bilan d'énergie mécanique est formulé pour une tranche élémentaire  $Adz$  de fluide. Ce bilan s'obtient en combinant l'équation de bilan de quantité de mouvement du mélange (1c) avec les équations de bilan de masse de chaque phase (1a) et (1b) :

$$d\left(\frac{W^2}{2}\right) + \frac{dp}{\rho_H} + \frac{\lambda}{D} \frac{W^2}{2} dz = 0 \quad (24)$$

où  $\lambda$  est le coefficient de perte de charge de Fanning.

Le troisième terme de l'équation de bilan (24) représente la dissipation d'énergie mécanique produite par le frottement visqueux au sein du fluide en écoulement. Ce terme est à l'origine de l'augmentation d'entropie du fluide régie par l'équation (22) déduite du second principe de la thermodynamique.

Le coefficient de perte de charge  $\lambda$  dépend en général de la rugosité de la paroi, du nombre de Mach effectif  $Me$  et du nombre de Reynolds  $Re_m = G \cdot D / \mu_m$  où  $\mu_m$  est la viscosité dynamique effective du mélange. Si on admet que la rugosité reste la même le long de la conduite, le coefficient  $\lambda$  ne dépend plus que de  $Re_m$  et  $Me$ . Comme la vitesse massique reste constante en vertu du bilan de masse, le nombre de Reynolds n'est plus fonction que de la viscosité dynamique  $\mu_m$ . Cette dernière dépend en général de la pression et de la température. D'une part, pour de faibles vitesses moyennes, ces deux grandeurs ne sont soumises qu'à des variations peu significatives. Dès lors, dans ces conditions, la variation de la viscosité  $\mu_m$  reste faible et  $\lambda$  dépend peu du nombre de Mach effectif. D'autre part, pour de grandes vitesses moyennes, la pression et la température peuvent subir des variations importantes le long de l'écoulement. Cependant, le nombre de Reynolds reste en général fort élevé ( $> 10^4 - 10^5$ ). Aussi, dans ce régime pleinement turbulent, le coefficient  $\lambda$

est peu sensible aux valeurs de  $Re_m$  et n'est plus fonction que de  $Me$ . En première approximation, pour simplifier, on négligera l'influence du nombre de Mach sur  $\lambda$ . Par conséquent, le coefficient de perte de charge sera considéré comme invariable tout le long de l'écoulement dans une conduite de section constante et on peut écrire alors :

$$\int_0^z \lambda \cdot dz \approx \lambda \cdot z$$

En tenant compte du bilan de masse sous forme intégrale (10) et de l'équation d'évolution de Fanno (14), l'expression (24) est transformée de manière à obtenir une relation explicite entre  $W$  et  $z$ . L'intégration de l'équation résultante entre la section d'entrée  $A_0$  et la section courante  $A$  distantes de  $z$  conduit à exprimer le paramètre de perte de charge  $\lambda \cdot z / D$  comme formulé dans l'équation (25).

Pour un titre massique fixé et des conditions d'entrée données, l'équation algébrique (25) peut être résolue numériquement pour déterminer la vitesse  $W$  dans chaque section de la conduite. Sur la base des valeurs de  $W$ , on peut ensuite déduire les valeurs de toutes les autres variables de l'écoulement :

- la masse volumique moyenne  $\rho_H$  : au moyen du bilan de masse sous forme intégrale (10) ;
- la pression  $p$  : au moyen de l'équation (14) de l'évolution de Fanno ;
- la température  $T$  : au moyen de l'équation d'état des gaz parfaits ;
- le taux de vide global  $\alpha$  : au moyen de l'équation constitutive du mélange (éq. (3)).

Il est intéressant de remarquer que le résultat (25) se réduit bien à l'expression connue lorsque le fluide est un gaz parfait [14] et quand le titre massique tend vers l'unité.

$$\begin{aligned} \frac{\lambda \cdot z}{D} = & \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \frac{1}{\Pi\psi} \left[ \Pi - \frac{Cst_0}{\left(\frac{\varphi}{\rho_L}\right)^2} \right] \cdot \left[ \ln \left( \frac{\frac{W}{W_0} + \varphi \frac{\rho_{H0}}{\rho_L}}{1 + \varphi \frac{\rho_{H0}}{\rho_L}} \right) - \left( \frac{\varphi \frac{\rho_{H0}}{\rho_L}}{1 + \varphi \frac{\rho_{H0}}{\rho_L}} \right) \cdot \left( \frac{1 - \frac{W}{W_0}}{\varphi \frac{\rho_{H0}}{\rho_L} + \frac{W}{W_0}} \right) \right] \\ & - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \frac{1}{\Pi\psi} \left[ 2 \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) \Pi\psi - \frac{Cst_0}{\left(\frac{\varphi}{\rho_L}\right)^2} \right] \cdot \ln \left( \frac{W}{W_0} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

avec :  $\varphi = (1-x) \left( \frac{2\Pi}{G^2} - 1 \right)$  et  $\psi = \frac{1 + (1-x)(\kappa - 1)}{x}$

Le paramètre de perte  $\frac{\lambda \cdot z}{D}$  présente un extremum pour la vitesse qui satisfait à la condition :

$$\frac{\partial}{\partial W} \left( \frac{\lambda \cdot z}{D} \right) = 0 \quad (26)$$

Le développement de cette condition conduit, compte tenu des définitions de  $\varphi$  et  $\psi$ , à la vitesse  $W^*$ , selon l'équation (27) où  $\Omega_0$  est un paramètre qui ne dépend que des conditions régnant à la section d'entrée du conduit.

On peut montrer, en partant de la relation (27) que pour cet extremum, la masse volumique du mélange satisfait à l'expression (28).

En se basant sur la relation définissant  $\Pi$ , il est possible d'exprimer la pression en fonction du paramètre  $\Pi$  et du nombre de Mach effectif  $Me$ . Ceci permet d'éliminer la pression de l'équation (14) de l'évolution de Fanno afin d'en déduire une relation liant  $\rho_H$  et  $Me$ . En imposant dans cette relation la condition de criticité  $Me = 1$ , on trouve une valeur de la masse volumique  $\rho_H^*$  qui satisfait à une relation s'identifiant exactement

à l'équation (28). Autrement dit, la vitesse  $W^*$  satisfaisant à l'équation (27) n'est autre que la célérité du son  $V_{son}$  atteinte à une certaine position  $z^*$ . Par conséquent, à la section située à la distance  $z^*$  extremum s'établit la condition de criticité et ainsi l'état limite de l'écoulement de Fanno.

La valeur extrême de  $\frac{\lambda \cdot z}{D}$  correspondante est donc un maximum. Celui-ci est, en fait, associé à la valeur maximale de l'entropie du fluide atteinte à la limite de l'écoulement de Fanno (cf. § 2.2).

La valeur maximale du paramètre  $\frac{\lambda \cdot z}{D}$  est obtenue en remplaçant dans l'équation (25) la masse volumique par la valeur trouvée en (28). On obtient finalement l'équation (29).

Cette expression montre que, pour un titre massique fixé et des conditions initiales données (variables d'état et vitesse), il existe une longueur maximale de la conduite au-delà de laquelle le régime d'écoulement diphasique considéré n'est plus possible. À l'extrémité de cette conduite ayant cette longueur maximale la condition de criticité est satisfaite.

$$W^* = \left( 1 - \frac{2\Pi}{G^2} \right) \frac{(1-x)G}{\rho_L} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\Omega_0}} \right)$$

$$\text{avec: } \Omega_0 \equiv \frac{2 \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \Pi \left( \frac{1+(1-x)(\kappa-1)}{x} \right) \left( \left( \frac{2\Pi}{G^2} - 1 \right) \frac{(1-x)}{\rho_L} \right)^2 - \text{Cst}_0}{\Pi \cdot \left( \left( \frac{2\Pi}{G^2} - 1 \right) \frac{(1-x)}{\rho_L} \right)^2 - \text{Cst}_0} \quad (27)$$

$$\left( \frac{1}{\rho_H^*} + \left( \frac{2\Pi}{G^2} - 1 \right) \frac{(1-x)}{\rho_L} \right)^2 = \frac{\left( \frac{2\Pi}{G^2} - 1 \right)^2 \left( \frac{1-x}{\rho_L} \right)^2 - \frac{\text{Cst}_0}{\Pi}}{\left( 1 - \frac{G^2}{\Pi} \right)} \quad (28)$$

$$\left( \frac{\lambda \cdot z}{D} \right)_{\text{Max}} = \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{x}{1+(1-x)(\kappa-1)} \left( \frac{\text{Cst}_0}{\Pi \left( \frac{q_0}{\rho_{H0}} \right)^2} - 1 \right) \cdot \left( \frac{q_0}{1-q_0} - \sqrt{1-\Omega_0} + \ln \frac{\sqrt{1-\Omega_0}}{q_0/(1-q_0)} \right)$$

$$- \left( 2 - \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{x}{1+(1-x)(\kappa-1)} \frac{\text{Cst}_0}{\Pi \left( \frac{q_0}{\rho_{H0}} \right)^2} \ln \left( q_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\Omega_0}} + 1 \right) \right) \right) \quad (29)$$

$$\text{où par définition: } q_0 \equiv \frac{\rho_{H0}}{\rho_L} (1-x) \left( 1 - \frac{2\Pi}{G^2} \right)$$

Le critère  $\left(\frac{\lambda \cdot z}{D}\right)_{Max}$  est associé à une production maximale d'entropie qui résulte de la contrainte imposée par le second principe de la thermodynamique. L'interprétation physique de ce résultat apparaît plus clairement si l'on considère un écoulement dont les conditions sont fixées à l'entrée d'une conduite de longueur supposée variable. À ces conditions initiales correspond un débit massique  $M$ . La force de cisaillement pariétale occasionne la diminution de la pression le long de la conduite et le fluide accélère jusqu'à la section de sortie. Si la conduite est suffisamment courte, la vitesse à la section de sortie est inférieure à la vitesse locale du son et le régime reste donc partout subcritique.

En augmentant progressivement la longueur de la conduite, la perte de pression globale ainsi que la vitesse à la section de sortie augmentent. Pour la longueur particulière régie par l'équation (29), la vitesse locale du son est atteinte à la sortie du conduit et le débit  $M$  s'identifie au débit critique associé aux conditions initiales fixées.

Cependant, pour une longueur encore plus élevée, l'écoulement associé à ces conditions initiales devient impossible en vertu du second principe.

Dans ces conditions, l'écoulement de Fanno se réadapte globalement de manière à ce qu'un débit massique  $M'$  plus faible que  $M$  puisse traverser la conduite. Un régime permanent caractérisé par un nouveau débit est ainsi généré. Cette propriété d'"autoadaptation" de l'écoulement de Fanno est une manifestation des effets irréversibles occasionnés par la dissipation mécanique.

Par ailleurs, comme la vitesse maximale du fluide est atteinte à la sortie de la conduite, le fluide atteint la vitesse locale du son à cet endroit. En conséquence, la section critique est toujours localisée à l'extrémité aval d'une conduite de section constante. Cette propriété est confirmée expérimentalement par de nombreux chercheurs aussi bien pour des écoulements monophasiques gazeux que pour des écoulements diphasiques. En effet, les résultats expérimentaux montrent que, lorsque l'écoulement devient critique (débit massique égal au débit maximum possible), le profil de pression présente un comportement monotone décroissant avec un minimum localisé à l'extrémité aval de la conduite. Ce minimum correspond à un gradient local de pression qui devient très important au voisinage de la section critique.

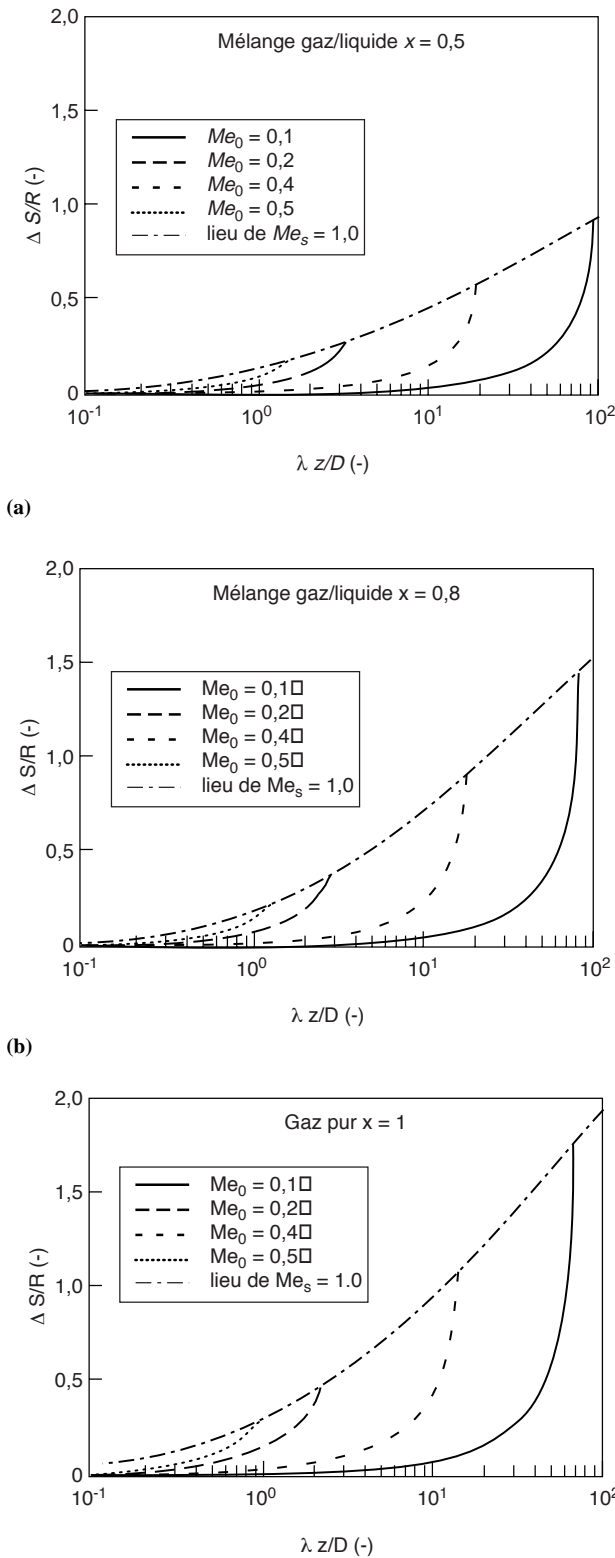
Ce profil monotone est préservé quelle que soit la diminution ultérieure effectuée sur la pression dans le réservoir aval.

#### 4 SOLUTION NUMÉRIQUE

Pour illustrer la solution numérique de l'écoulement diphasique de Fanno, les variables  $p$ ,  $T$ ,  $W$  et  $\alpha$  ont été calculées à l'extrémité d'une conduite dont la longueur est variable. Ainsi, pour un titre massique fixé et des conditions d'entrée données (pression  $p_0$ , température  $T_0$  et nombre de Mach  $Me_0$ ), l'équation (25) est résolue numériquement au moyen de l'algorithme de Newton-Raphson afin d'obtenir la vitesse pour chaque valeur de la coordonnée  $z$  de la section de sortie jusqu'à atteindre la longueur maximum pour laquelle le nombre de Mach effectif à la sortie  $Me_s$  devient égal à l'unité. Les valeurs des grandeurs ( $\rho_H$ ,  $p$ ,  $T$ ) sont déduites au moyen des expressions (10), (14) et de l'équation d'état des gaz parfaits. On peut ensuite calculer la variation globale d'entropie massique du fluide entre les extrémités de la conduite en intégrant l'équation (21); on obtient :

$$\frac{\Delta s}{R} = \frac{C_{pm}}{R} \ln \frac{T_s}{T_0} - x \ln \frac{p_s}{p_0}$$

Pour un titre massique égal à 0,5, 0,8 et 1,0, les résultats de calcul de l'accroissement adimensionnel d'entropie  $\Delta s/R$  sont portés en fonction du paramètre de perte de charge répartie  $\lambda z/D$  respectivement aux figures 4a, 4b et 4c. La pression et la température à l'entrée ont toujours été fixées respectivement à  $5 \cdot 10^5$  Pa et 293 K. La variation d'entropie, fort sensible au nombre de Mach initial, croît rapidement au voisinage de la section critique ( $Me_s = 1$ ). Cette dernière est représentée par le point limite de la courbe  $Me_0 = Cst$  pour lequel la variation d'entropie et le paramètre de perte deviennent maximum. Le lieu des points caractérisés par  $Me_s = 1$  constitue la courbe de Fanno. Les résultats présentés aux figures 4 montrent que la courbe de Fanno s'élève sensiblement lorsque le titre massique augmente. Cependant, ce comportement n'a pu être vérifié que pour l'intervalle de titre massique considéré. La vérification n'a pu se faire dans le domaine des plus faibles titres pour lequel les difficultés relatives à la résolution de l'équation (25) deviennent significatives, surtout lorsque le nombre de Mach  $Me_s$  se rapproche de l'unité.



(a)  
(b)  
(c)  
Figure 4  
Solution de l'écoulement diphasique de Fanno.  
Solution of the Fanno two-phase flow.

## 5 APPLICATION AUX CIRCUITS DE TRANSPORT DE FLUIDE COMPRESSIBLE : ÉTAT DIT DE « MULTICRITICITÉ »

Un circuit simplifié de transport reliant un réservoir amont à un réservoir aval est représenté schématiquement sur la figure 5. Il est disposé horizontalement et comporte une conduite amont de petit diamètre  $D_1$  constant (section  $A_1$ ) et une conduite aval de grand diamètre  $D_2$  constant (section  $A_2$ ). Soient  $L_{am}$  et  $L_{av}$  les longueurs des conduites respectivement amont et aval. La longueur de rétablissement du frottement pariétal en aval de la singularité est notée  $L_2$ . Le rapport de section de l'élargissement brusque  $\sigma$  est défini par :

$$\sigma = \frac{A_1}{A_2} = \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 \quad (0 < \sigma < 1)$$

On se propose d'établir le critère qui justifie l'existence d'un état dit «doublement critique» c'est-à-dire un état pour lequel la vitesse du fluide atteint la vitesse locale du son simultanément en deux sections distinctes de l'écoulement.

### 5.1 Liaisons entre les conditions aux sections critiques

Pour la raison évoquée plus haut (cf. § 3), la section critique ne peut être localisée qu'à l'extrémité d'une conduite de section constante. Lorsqu'un état critique est simultanément observé dans les sections  $A_1$  et  $A_2$ , localisées respectivement à l'extrémité de la petite conduite et de la grande conduite (fig. 5), les variables caractéristiques de l'écoulement en ces endroits deviennent

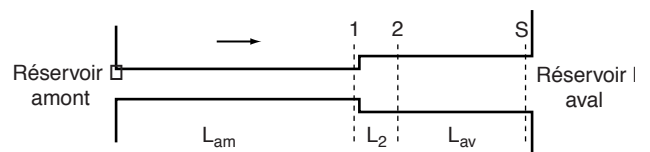


Figure 5

Représentation d'un circuit de décharge simplifié comportant un seul élargissement brusque de section.

Simplified discharge circuit with a single sudden enlargement.



liées par des relations particulières. Pour mettre en évidence ces relations, on exprime les lois globales de conservation pour le volume de contrôle délimité par les sections  $A_1$ ,  $A_s$  et les parois matérielles de la grande conduite. En adoptant les mêmes hypothèses H1 à H7 que précédemment, on obtient :

– conservation de la masse de la phase gazeuse :

$$\alpha_s \frac{p_s}{T_s} W_s = \sigma \alpha_1 \frac{p_1}{T_1} W_1 \quad (30)$$

– conservation de la masse de la phase liquide :

$$(1 - \alpha_s) W_s = \sigma (1 - \alpha_1) W_1 \quad (31)$$

– conservation de l'énergie totale du mélange :

$$h_{ms} + \frac{1}{2} W_s^2 = h_{m1} + \frac{1}{2} W_1^2 \quad (32)$$

Admettre que dans chacune des sections  $A_1$  et  $A_s$  existe un état critique, revient à imposer à ces endroits que la vitesse moyenne du mélange est égale à la vitesse locale du son, soit :

$$W_1 = V_{son,1} \quad (33)$$

$$W_s = V_{son,s} \quad (34)$$

où  $V_{son}$  est calculé par la formule (8).

En tenant compte des équations globales de conservation de la masse de chaque phase ((30) et (31)) et des conditions de criticité ((33) et (34)) dans l'équation (32) de l'énergie, on trouve l'expression du second degré suivante :

$$c_1 \tau_c^2 + c_2 \tau_c + c_3 = 0 \quad (35)$$

où  $\tau_c$  est défini par :

$$\tau_c \equiv \left( \frac{T_s}{T_1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

tandis que les coefficients  $c_i$  sont des fonctions de  $\sigma$  et des variables d'état à la première section critique. Dès lors, on a  $\tau_c = \tau_c(p_1, T_1, \alpha_1, \sigma)$ .

En combinant les équations (30), (31), (33) et (34), on trouve, après quelques transformations, les relations

adimensionnelles simples qui lient les variables de l'écoulement dans les deux sections critiques :

$$\frac{p_s}{p_1} = \sigma \tau_c \quad (36)$$

$$\frac{W_s}{W_1} = \alpha_1 \tau_c + (1 - \alpha_1) \sigma \quad (37)$$

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_1} = \frac{1}{\left( \alpha_1 + (1 - \alpha_1) \frac{\sigma}{\tau_c} \right)} \quad (38)$$

Ces relations sont remarquables dans la mesure où elles sont indépendantes du détail de l'évolution du fluide entre les deux sections critiques. Cette propriété relève du fait que ces relations ont été obtenues sur la base de considérations relatives au premier principe (éq. (32)) sans faire intervenir le bilan de quantité de mouvement ni le bilan d'énergie mécanique.

Il est intéressant de noter que ces liaisons se simplifient encore plus pour le cas monophasique gazeux. En effet, en posant  $x = 1$ , la solution unique de l'équation (35) est donnée par  $\tau_c = 1$ , c'est-à-dire qu'au point de vue global, cet écoulement est isotherme. Dans ces conditions, la solution établie plus haut se réduit à :

$$\frac{T_s}{T_1} = \frac{W_s}{W_1} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{p_s}{p_1} = \sigma$$

Ainsi, on aboutit à la propriété remarquable selon laquelle le rapport des pressions critiques d'un écoulement gazeux est égal au rapport de section de l'élargissement brusque.

Si l'écoulement est critique à la section  $A_1$ , les relations (36) à (38) permettent de prévoir les conditions qui devraient régner à la section  $A_s$  pour que l'écoulement y soit aussi critique. L'augmentation globale d'entropie entre les deux sections critiques s'obtient en intégrant l'équation (21) entre les deux états considérés. Compte tenu de la définition de  $\tau_c$  et de la relation (36), on obtient :

$$\frac{\Delta s_{1-s}}{R} = \ln \frac{\tau_c \left( \frac{C_{pm}}{R} - x \right)}{\sigma^x} \quad (39)$$

Cette production d'entropie ne dépend que des conditions à la première section critique et de la géométrie, c'est-à-dire du rapport de section de l'élargissement. Elle est indépendante de l'évolution subie par le



fluide entre les deux sections critiques puisque l'entropie est une fonction d'état. Pour un écoulement monophasique gazeux, le résultat (39) se réduit à :

$$\frac{\Delta s_{1-s}}{R} = \ln \frac{1}{\sigma}$$

Dans ces conditions, on voit que la production d'entropie n'est fonction que de la géométrie de l'élargissement brusque.

## 5.2 Critère de double criticité

Lorsque la pression régnant dans le réservoir amont est constante et que l'écoulement devient critique à l'extrémité de la grande conduite, la pression à cet endroit devient indépendante de celle régnant dans le réservoir aval. Par conséquent, la condition pour que l'écoulement soit critique à l'extrémité de la grande conduite consiste à imposer que la pression dans le réservoir aval  $p_R$  soit inférieure ou égale à la pression en  $A_s$  :  $p_R \leq p_s$ .

Compte tenu du résultat (36), on trouve l'inégalité :

$$p_R \leq \sigma \tau_c p_1 \quad (40)$$

Cependant, la condition (40) n'est pas suffisante pour assurer aussi la criticité à l'extrémité de la petite conduite. En effet, on peut le montrer par le raisonnement suivant. On suppose que, pour des conditions régnant dans le réservoir amont fixées, l'écoulement satisfait à la condition de criticité en  $A_1$  ; soit  $M_c$  le débit massique associé à cet état. Pour une longueur de conduite aval suffisamment importante, la condition de criticité est aussi satisfaite à son extrémité. Cette longueur est la valeur maximale associée aux variables d'écoulement dans la section de rétablissement  $A_2$  (cf. § 3). À ce moment, la production totale d'entropie dans la conduite aval est fournie par la relation (39). Pour une longueur de conduite aval plus grande que celle correspondant à la limite de l'évolution de Fanno, l'écoulement considéré devient impossible. En fait, dans ce cas, la production d'entropie résultante est due à la dissipation d'énergie mécanique dans l'écoulement perturbé juste en aval de l'élargissement brusque et dans l'écoulement établi à travers la grande conduite, d'une part, et aux ondes de chocs, d'autre part. Cette production d'entropie devient plus grande que celle fournie par (39) qui représente la valeur maximale possible que

l'écoulement à travers la grande conduite peut subir. Dès lors, pour cette configuration géométrique, l'écoulement ne peut plus être critique au droit de l'élargissement. Pour permettre à l'écoulement de rester néanmoins possible, les conditions à la section  $A_2$ , et donc à la section  $A_1$ , vont se réadapter d'une manière telle qu'elles correspondent à un débit  $M_c'$  plus petit que  $M_c$  pour permettre l'écoulement du fluide avec une résistance hydrodynamique de frottement moindre. Donc, la condition pour que l'écoulement puisse être critique à l'extrémité de la petite conduite est de nature entropique et se traduit à travers l'inégalité :

$$\frac{\lambda \cdot (L_{av} - L_2)}{D_2} \leq \left( \frac{\lambda L}{D} \right)_{Max,2} \quad (41)$$

où :

$$\left( \frac{\lambda L}{D} \right)_{Max,2} \equiv \xi_{Max}$$

est le paramètre de perte de charge maximum associé au titre massique  $x$  et aux conditions initiales dans la section  $A_2$  où le frottement pariétal est rétabli. Le critère de double criticité renferme simultanément les conditions (40) et (41).

## 5.3 Configurations critiques

Il n'est pas aisé d'évaluer  $\xi_{Max}$  étant donné la difficulté de déterminer les conditions à la section  $A_2$  pour des conditions critiques données à la section  $A_1$ . Cette difficulté relève de la structure bidimensionnelle de l'écoulement compressible à grande vitesse en aval d'un élargissement brusque de section. En effet, en exprimant le bilan de quantité de mouvement au fluide diphasique contenu dans le volume de contrôle délimité par les sections  $A_1, A_2$ , la face transversale et la paroi de la grande conduite, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} p_2 + (\alpha_2 \rho_{G2} + (1 - \alpha_2) \rho_L) W_2^2 \\ = \sigma p_1 + \sigma (\alpha_1 \rho_{G1} + (1 - \alpha_1) \rho_L) W_1^2 + (1 - \sigma) p_{b1} \end{aligned}$$

dans laquelle  $p_{b1}$  est la pression de face, c'est-à-dire la pression régnant dans la zone tourbillonnaire en contact avec la marche transversale de l'élargissement. Cette pression dépend étroitement de la structure de l'écoulement au voisinage de l'élargissement. Juste en aval de

la section  $A_1$ , où est localisée une zone supercritique, se produit une série de détente-recompressions autour d'ondes de chocs obliques et droits de type Prandtl-Meyer. Cette série de détente-recompressions, siège d'une production d'entropie, aboutit finalement à un écoulement subcritique dans le conduit aval (section de rétablissement  $A_2$ ). Ce comportement est illustré à la figure 6 pour une tuyère convergente sonique débouchant dans un réservoir de grande dimension [15]. L'hétérogénéité radiale de la pression à la singularité  $((p_1 - p_{b1})/p_0)$  est corrélée aux conditions régnant dans le réservoir aval [7].

Cependant, si l'on impose à l'écoulement d'être juste à la limite de la criticité à l'extrémité de la conduite amont, aucune onde d'expansion oblique n'existera au voisinage du bord d'attaque de l'élargissement, et la pression de face peut être alors supposée égale à la pression moyenne dans la section  $A_1$ . Par ailleurs, dans ces conditions, l'absence de zone supercritique (siège d'une production d'entropie localisée au front des ondes de discontinuité) permet une plus grande production d'entropie répartie consécutivement aux travaux de frottement le long de la conduite aval. La limite de l'écoulement de Fanno est donc atteinte pour une valeur maximale du paramètre de perte de charge  $\phi_{Max}$  plus

élevée que celle qui correspond aux conditions critiques réelles à la section  $A_1$  c'est-à-dire  $\xi_{Max} = (\lambda L/D)_{Max}$ . Soit ce suprémum  $\phi_{Max}$  :

$$\phi_{Max} = \text{Sup}_{\bar{X}_1} \xi_{Max}$$

le suprémum étant pris par rapport aux conditions d'entrée.

Nous nous proposons d'évaluer cette borne supérieure afin de pouvoir discuter l'existence possible des différentes configurations critiques. Pour ce faire, l'écoulement est divisé en deux parties. Premièrement, on traite la partie de l'écoulement au voisinage de l'élargissement brusque, c'est-à-dire en amont de la section  $A_2$ . Deuxièmement, on considère l'écoulement de Fanno à travers la grande conduite en aval de la section  $A_2$ .

#### 5.4 Zone en amont de la section $A_2$

Nous avons vu auparavant que la borne supérieure  $\phi_{Max}$  correspond à la situation pour laquelle l'écoulement est juste à la limite d'être critique au droit de l'élargissement.

Dans ces conditions, la pression moyenne s'exerçant sur la face transversale peut être supposée égale à la pression moyenne dans la section  $A_1$ , comme l'ont observé expérimentalement les auteurs, en régime subcritique ([16, 17, 18]). Dès lors, les lois de conservation globales appliquées au volume de contrôle délimité par les sections  $A_1, A_2$ , la face transversale et la paroi de la grande conduite peuvent s'écrire, compte tenu des hypothèses H1 à H7, comme suit :

– conservation de la masse de la phase gazeuse :

$$\alpha_2 \rho_{G2} W_2 = \sigma \alpha_1 \rho_{G1} W_1 \quad (42a)$$

– conservation de la masse de la phase liquide :

$$(1 - \alpha_2) W_2 = \sigma (1 - \alpha_1) W_1 \quad (42b)$$

– conservation de quantité de mouvement du mélange :

$$\begin{aligned} p_2 + (\alpha_2 \rho_{G2} + (1 - \alpha_2) \rho_L) W_2^2 \\ = p_1 + \sigma (\alpha_1 \rho_{G1} + (1 - \alpha_1) \rho_L) W_1^2 \end{aligned} \quad (42c)$$

où la résultante des forces de frottement pariétales a été négligée par rapport à la force d'inertie du mélange ;

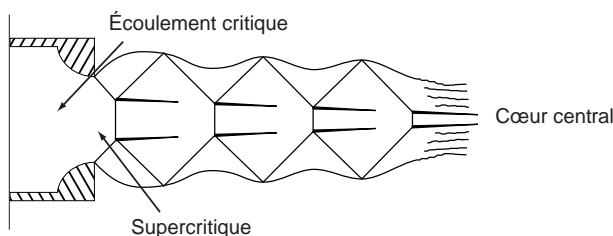
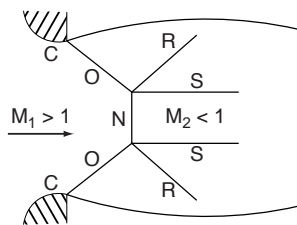


Figure 6

Structure bidimensionnelle d'un écoulement critique débouchant dans un réservoir de grande dimension [15].

Two-dimensional structure of a critical flow culminating in a large size tank [15].

– conservation d'énergie totale du mélange :

$$h_{m2} + \frac{W_2^2}{2} = h_{m1} + \frac{W_1^2}{2} \quad (42d)$$

L'élimination du taux de vide du système d'équations (42a) à (42d) permet de ramener celui-ci à un système algébrique non linéaire de dimension plus réduite faisant apparaître le titre massique. Ce système possède une solution analytique explicitée dans un travail antérieur [19]. Cette solution fournit explicitement les variables de l'écoulement dans la section  $A_2$  en fonction des variables dans la section critique  $A_1$  et du rapport de section  $\sigma$  de l'élargissement :

$$\vec{X}_2 = \Psi(p_1, T_1, x, \sigma) \quad (42e)$$

### 5.5 Zone en aval de la section $A_2$

Le frottement pariétal s'établit complètement en aval de la section  $A_2$  et l'écoulement devient de type Fanno. Ce dernier a été analysé aux paragraphes 2 et 3. Le paramètre de perte charge maximum correspondant à la limite de Fanno est fourni par l'équation (29), dans laquelle les variables de référence affectées de l'indice 0 doivent être remplacées par les variables d'écoulement à la section  $A_2$ . Celles-ci étant couplées avec les variables d'écoulement dans la section  $A_1$  et  $\sigma$  (éq. (42e)), le paramètre de perte de charge maximum en aval de la section  $A_2$  est fonction du titre massique, du rapport de section et des variables d'état dans la section amont.

Le paramètre  $\wp_{Max}$  est calculé sur la base de la solution du système d'équations (42a) à (42d) (à savoir (42e)) et de la formule (29). La valeur de ce paramètre est portée à la figure 7 en fonction de l'inverse du rapport de section pour différentes valeurs du titre massique. Les valeurs de la pression  $p_1$  et de la température  $T_1$  à la section amont ont été fixées respectivement à  $10^5$  Pa et 293 K. Par ailleurs, d'autres calculs ont été effectués pour des valeurs plus élevées de la pression et de la température ( $p_1 = 2 \cdot 10^6$  Pa et  $T_1 = 373$  K). Pratiquement aucun effet de ces grandeurs n'est constaté. Ces résultats montrent que les variables dans la section amont n'influencent pratiquement pas les valeurs de  $\wp_{Max}$  :

$$\wp_{Max} = \wp_{Max}(x, \sigma) \quad (43)$$

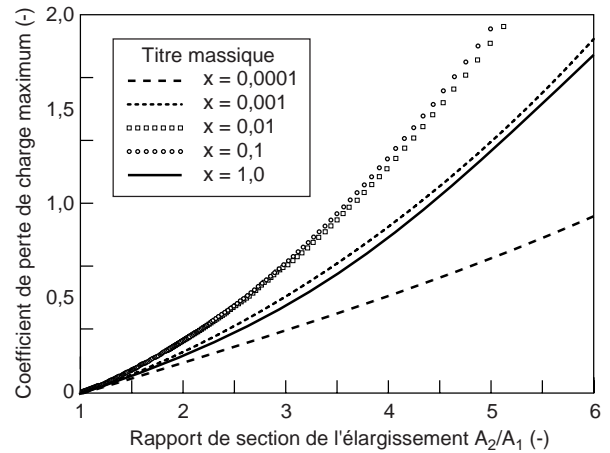


Figure 7

Paramètre de perte de charge maximum en fonction de l'inverse du rapport de section : existence de la double criticité.

Maximum head loss coefficient as a function of the inverse of the cross section ratio: existence of double criticality.

La condition (41) devient :

$$\frac{\lambda (L_{av} - L_2)}{D_2} < \wp_{Max}(x, \sigma) \quad (44)$$

À titre massique constant, le paramètre de perte maximum croît non linéairement en fonction de  $1/\sigma$ . En effet, à diamètre du conduit amont fixé, la résistance opposée à l'écoulement en aval de la section  $A_2$  est d'autant plus faible que le diamètre du conduit aval  $D_2$  est élevé. Ceci conduit à la nécessité de considérer une longueur du conduit aval plus grande afin que la production d'entropie totale satisfasse à la valeur limite fournie par l'équation (39). La courbe  $\wp_{Max}$  fonction de  $1/\sigma$  à titre massique constant subdivise le quart de plan  $(\lambda(L_{av} - L_2)/D_2, 1/\sigma)$  en deux régions :

- Le domaine inférieur (condition (44) satisfaite) : c'est le domaine des conduites de petite longueur et/ou à paroi lisse. Il correspond à des pertes de charge associées à une résistance opposée au fluide suffisamment faible pour permettre à l'écoulement d'être critique au droit de l'élargissement. Ce domaine constitue la zone d'une possible double criticité. Dès lors les différentes configurations critiques possibles sont données par :
  - état critique au droit de l'élargissement et état subcritique à l'extrémité de la grande conduite : condition (40) non satisfaite ;

- état critique simultanément au droit de l'élargissement et à l'extrémité de la grande conduite : condition (40) satisfaite.
- Le domaine supérieur (condition (44) non satisfaite) : c'est le domaine des conduites de grande longueur et/ou à paroi rugueuse. Il correspond à des pertes de charge associées à une résistance opposée au fluide trop importante pour permettre à l'écoulement d'être critique au droit de l'élargissement. Dès lors, la seule configuration critique possible consiste à un état critique à l'extrémité de la grande conduite pour autant que la pression de stagnation régnant dans le réservoir aval soit suffisamment basse.

La figure 7 montre aussi que pour les faibles titres, la zone d'une possible double criticité s'étend lorsque le titre augmente. Cependant, pour les titres élevés jusqu'à la situation monophasique gazeuse, cette zone se restreint lorsque le titre croît. Ce comportement est mis en évidence sur la figure 8 où le paramètre de perte maximum est porté en fonction du titre massique pour différentes valeurs de  $1/\sigma$ . Ce résultat montre bien que pour une géométrie fixée,  $\phi_{Max}$  évolue en fonction du titre massique d'une manière non monotone. L'extremum que présente cette évolution est un maximum. L'existence de ce maximum s'explique par le comportement non monotone de la vitesse du son vis-à-vis du taux de vide (fig. 3). On note que la représentation 2D suggérée sur la figure 7 ne permet pas de mettre en évidence d'une manière explicite le domaine d'existence

de l'écoulement dit doublement critique. Pour ce faire, il est nécessaire d'adopter une représentation 3D dans l'espace des phases ( $\lambda L/D$ ,  $\sigma$ ,  $p_R/p_1$ ) en faisant apparaître le rôle de la contrepression aval [20].

## 6 VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE LA PRÉSENTE THÉORIE

Des données expérimentales non publiées ont été obtenues pour des relâchements quasi stationnaires d'azote pur ou de mélange eau-azote à travers une ligne de décharge complexe comportant plusieurs élargissements brusques de section [8]. Dans ce qui suit, les résultats de prédictions fournis par la présente théorie sont comparés avec ces données expérimentales.

### 6.1 Description de la géométrie et des conditions expérimentales

Une vue schématique de la section testée dans le laboratoire DNV est représentée sur la figure 9. On a repris sur ce dessin les principales dimensions caractérisant la ligne de décharge ainsi que les positions des prises de mesures de la pression et de la température. Le paramètre de perte de charge  $\lambda L/D$  de chaque conduite est donné comme suit :  $(\lambda L/D)_1 = 11,77$ ,  $(\lambda L/D)_2 = 11,58$ ,  $(\lambda L/D)_3 = 12,29$  et  $(\lambda L/D)_4 = 0,06$ . La ligne de décharge comporte quatre élargissements brusques en cascade dont les rapports de section sont indiqués au tableau 1. La section testée est reliée à un réservoir amont rempli d'azote à une pression de 100 bars au début de la vidange. L'injection d'eau, effectuée juste en aval du réservoir d'azote, est contrôlée de manière à maintenir le titre massique constant.

TABLEAU 1

Configurations critiques possibles pour l'écoulement d'azote pur et de mélange eau-azote à travers la ligne de décharge testée par DNV  
(C : critique; NC : non critique)

Possible critical configurations for pure nitrogen and water-nitrogen mixture flow through the discharge line tested by DNV  
(C = critical, NC = non-critical)

| Élargissement        | E0     | E1    | E2    | E3    | S     |
|----------------------|--------|-------|-------|-------|-------|
| Rapport de section   | 0,1016 | 0,580 | 0,652 | 0,106 | (~ 0) |
| État de l'écoulement | C      | NC    | NC    | C     | C     |
|                      | C      | NC    | NC    | C     | NC    |
|                      | C      | NC    | NC    | NC    | NC    |

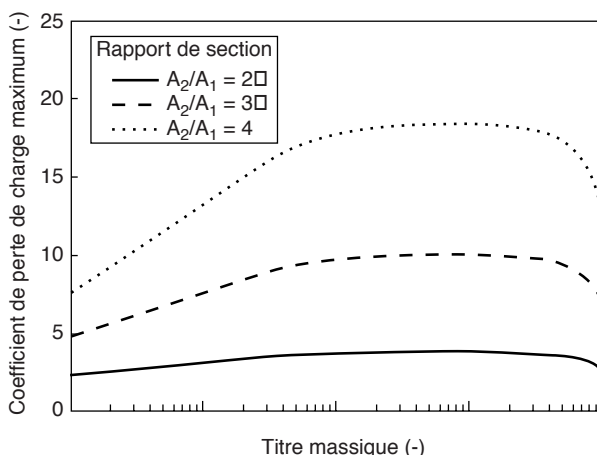


Figure 8

Paramètre de perte de charge maximum en fonction du titre massique : existence de la double criticité.

Maximum head loss coefficient as a function of mass quality: existence of double criticality.

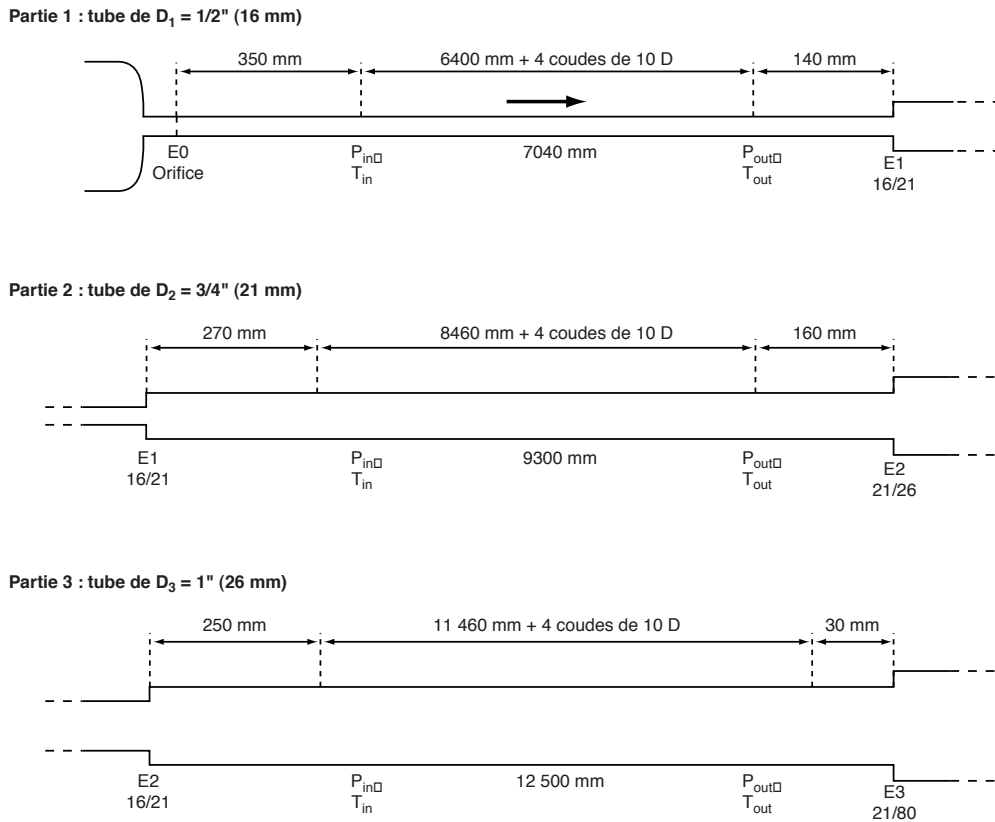


Figure 9

Représentation schématique de la ligne de décharge testée par DNV.  
*Schematic of the discharge line tested by DNV.*

Les fluides s'écoulent vers un réservoir aval à la pression atmosphérique. Durant la dépressurisation du réservoir d'azote, les grandeurs suivantes sont mesurées : le débit massique total, le titre massique, la pression et la température dans les réservoirs amont et aval ainsi que les pressions et les températures le long de la section testée.

## 6.2 Prédiction des configurations critiques possibles

La condition (44) est appliquée à chaque changement brusque de section pour l'expérience réalisée sur un écoulement eau-azote de titre massique égal à 0,6. On déduit que l'état critique de l'écoulement au droit des élargissements E0 (aval du diaphragme) et E3 est possible. Par ailleurs, la condition (40) indique que l'écoulement peut être aussi critique à la sortie S de la ligne pour autant que la pression dans le réservoir amont soit suffisamment élevée, plus précisément si :

$p_0 > p_R / (\sigma_{or} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)$  où  $p_R \approx p_{atm}$ . Par contre, l'état critique de l'écoulement au droit des élargissements E1 et E2 est impossible. Les mêmes résultats de configurations critiques possibles sont obtenus pour un titre massique égal à 0,9 ainsi que pour le cas de la décharge d'azote pur.

Les différentes configurations critiques possibles prédites par le présent formalisme sont synthétisées au tableau 1. Chaque configuration correspond à un état critique au droit de l'élargissement E0. Cet état étant le premier à être franchi par le fluide, la limitation du débit massique se produit toujours au niveau de cette singularité. L'état de l'écoulement au droit de l'élargissement E3 et à la sortie S de la ligne peut être critique ou non en fonction des conditions de stagnation dans le réservoir amont pour des conditions de stagnation fixées dans le réservoir aval. Comme la pression de stagnation dans le réservoir amont diminue au cours de la vidange, les états de l'écoulement en E0, E3 et S peuvent basculer de C (critique) à NC (non critique).

### 6.3 Comparaisons des résultats de simulations de l'écoulement multicritique avec les données expérimentales

Un code *Multidiph* a été développé pour le calcul des écoulements multicritiques à travers des lignes de décharges complexes. Ce code se base sur la résolution, au moyen de l'algorithme déduit du critère (40) et (44), des équations (3), (10), (14), (25), (36) à (38), (42e) et l'équation d'état des gaz parfaits. Les données nécessaires pour le calcul de l'écoulement sont la pression et la température du fluide dans les réservoirs amont et aval et le titre massique. La procédure de calcul appliquée à la section testée par *DNV* est détaillée dans la référence [21].

Les résultats des simulations du débit massique total, de la pression et de la température sont comparés avec les données expérimentales obtenues pour un mélange eau-azote de titre massique  $x = 0,6$  (test 15) respectivement aux figures 10, 11 et 12. La pression et la température considérées sont celles mesurées aux extrémités du conduit de diamètre  $D_3$ . Les fluctuations importantes observées à certains moments des valeurs mesurées des variables de l'écoulement sont attribuées à la difficulté expérimentale de maintenir le titre massique constant durant la décharge du réservoir amont sous pression. La figure 10 présente la comparaison entre les valeurs calculée et mesurée du débit massique total durant toute la période de vidange du réservoir. Le modèle de débit critique prévoit fort bien les résultats expérimentaux sur l'entièreté du temps de décharge. Cet accord indique que la section critique associée au blocage de débit est bien localisée à l'orifice (E0) comme le prévoit le modèle.

La figure 11 indique que les prédictions théoriques de la pression s'accordent, en général, fort bien avec les données expérimentales. On peut remarquer qu'au début de la décharge (temps  $< 100$  s, fig. 11), la pression  $p_{out}$  à la sortie du conduit de diamètre  $D_3$  est bien plus élevée que la pression atmosphérique régnant dans le réservoir aval. Dès lors, au début de la décharge, l'écoulement est simultanément critique en deux sections distinctes de la ligne, à l'orifice (E0) et à l'extrémité de la conduite de diamètre  $D_3$  (E3), la condition (40) étant satisfaite. Cependant, après un temps suffisamment élevé, la pression dans le réservoir amont a diminué d'une manière telle que la condition (40) ne peut plus être satisfaite : l'écoulement devient simplement

critique à la section E0. On note, par ailleurs, une légère surestimation de la pression  $p_{out}$  (fig. 11).

Les valeurs calculée et mesurée des températures  $T_{in}$  et  $T_{out}$  en fonction du temps de décharge sont comparées sur la figure 12. Au début de l'écoulement, les températures calculées restent systématiquement plus élevées que les valeurs mesurées, l'écart étant de l'ordre de 3 à 5 °C. Ce dernier peut provenir en partie du déséquilibre thermique du système gaz-liquide au point de mélange, dans la mesure où il existe une différence entre la température du gaz et celle du liquide dans leurs réservoirs amont respectifs : les mesures indiquent effectivement que  $T_L - T_G \sim 5^\circ\text{C}$  au début de la décharge. Cependant, l'écart entre les valeurs mesurée et calculée diminue sensiblement lorsque le temps augmente. Après un temps suffisamment élevé, on peut constater que le modèle prédit d'une manière satisfaisante les températures, ceci dû en partie à une meilleure homogénéisation thermique des phases au point de mélange (la différence des températures des phases dans leurs réservoirs respectifs devient en effet négligeable). La différence entre les valeurs prédites et expérimentales des températures est aussi attribuée à l'existence des transferts de chaleur entre les parois et l'ambiance. Ces transferts deviennent non négligeables dans le cas des longues conduites.

La restriction imposée par l'hypothèse H6 d'écoulement adiabatique a également été mise en évidence à la suite de comparaisons des simulations avec les résultats de mesures effectuées sur des écoulements monophasiques d'azote pur (test 10). Ces comparaisons, en termes de températures aux extrémités des conduites de diamètre  $D_1$  et  $D_2$ , sont présentées respectivement aux figures 13 et 14. On note que les écarts entre les prédictions théoriques et les données s'atténuent au cours de la décharge à la suite de la relaxation vers un état d'équilibre thermique. Par conséquent, la prise en considération des transferts thermiques avec le milieu extérieur pourrait constituer une amélioration intéressante du modèle proposé.

Les résultats des simulations sont aussi comparés avec ceux du test expérimental obtenus pour un mélange eau-azote de titre massique  $x = 0,9$  (test 14) aux figures 15, 16 et 17. La même analyse que celle faite pour le cas du test 15 est applicable pour ces résultats. L'interruption de l'acquisition des données entre les instants  $t = 300$  s et  $t = 550$  s correspond au passage d'un grand bouchon de liquide.



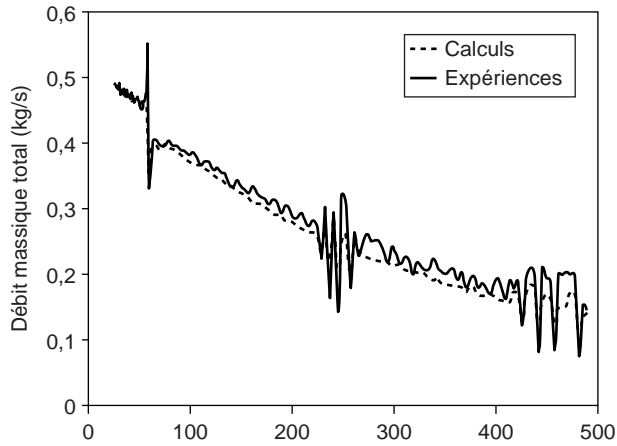


Figure 10

Évolution du débit massique total : comparaison des résultats du modèle avec les données du test 15 de DNV ( $x = 0,6$ ).

*Variation in total mass flowrate: comparison of the results of the model with DNV's test 15 data ( $x = 0.6$ ).*

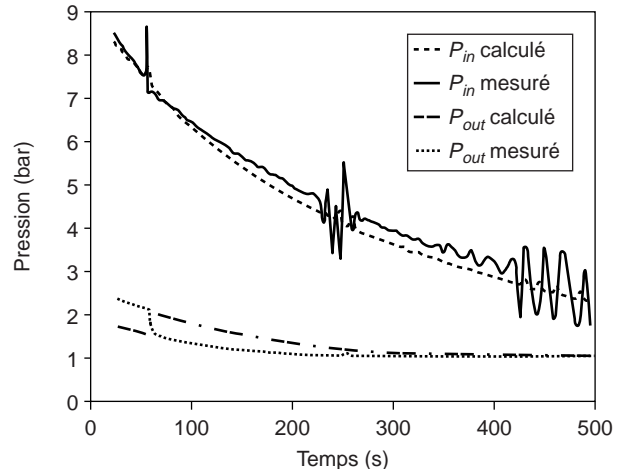


Figure 11

Évolution des pressions aux extrémités de la conduite de diamètre  $D_3$  : comparaison des résultats du modèle avec les données du test 15 de DNV ( $x = 0,6$ ).

*Variation in pressure at the ends of the duct of diameter  $D_3$ : comparison of the results of the model with DNV's test 15 data ( $x = 0.6$ ).*

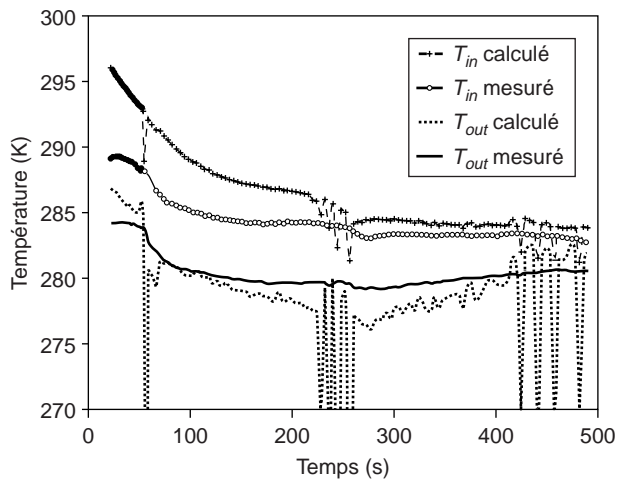


Figure 12

Évolution des températures aux extrémités de la conduite de diamètre  $D_3$  : comparaison des résultats du modèle avec les données du test 15 de DNV ( $x = 0,6$ ).

*Variation in temperature at the ends of the duct of diameter  $D_3$ : comparison of the results of the model with DNV's test 15 data ( $x = 0.6$ ).*

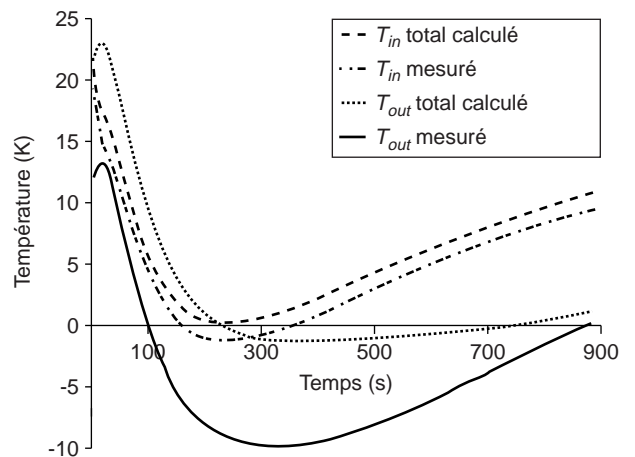


Figure 13

Évolution des températures de l'écoulement d'azote pur aux extrémités de la conduite de diamètre  $D_1$  : comparaison des résultats du modèle avec les données du test 10 de DNV ( $x = 1$ ).

*Variation in pure nitrogen flow temperature at the ends of the duct of diameter  $D_1$ : comparison of the results of the model with DNV's test 10 data ( $x = 1$ ).*

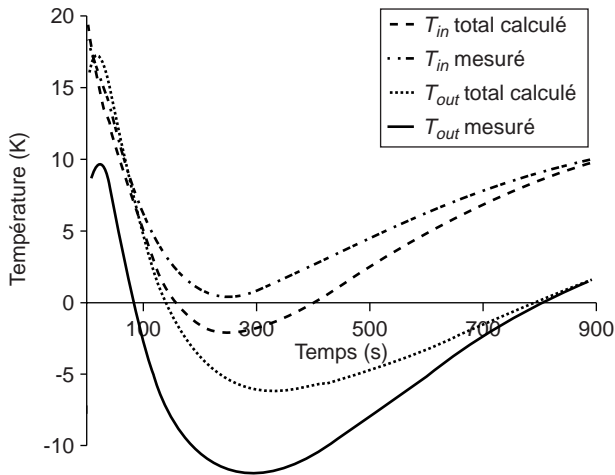


Figure 14

Évolution des températures de l'écoulement d'azote pur aux extrémités de la conduite de diamètre  $D_2$ : comparaison des résultats du modèle avec les données du test 10 de DNV ( $x = 1$ ).

*Variation in pure nitrogen flow temperature at the ends of the duct of diameter  $D_2$ : comparison of the results of the model with DNV's test 10 data ( $x = 1$ ).*

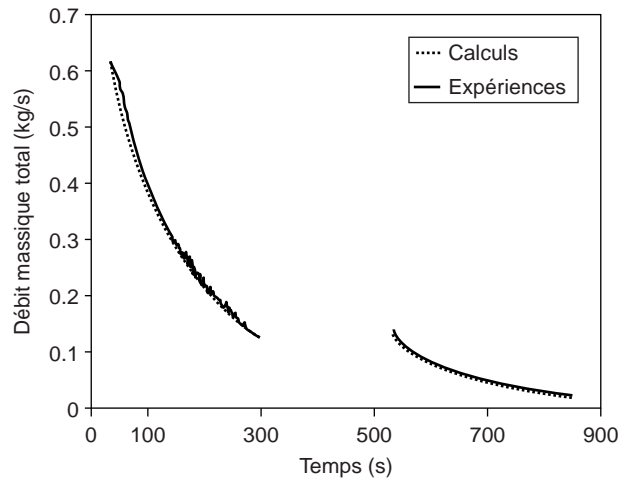


Figure 15

Évolution du débit massique total : comparaison des résultats du modèle avec les données du test 14 de DNV ( $x = 0,9$ ).

*Variation in total mass flowrate: comparison of the results of the model with DNV's test 14 data ( $x = 0,9$ ).*

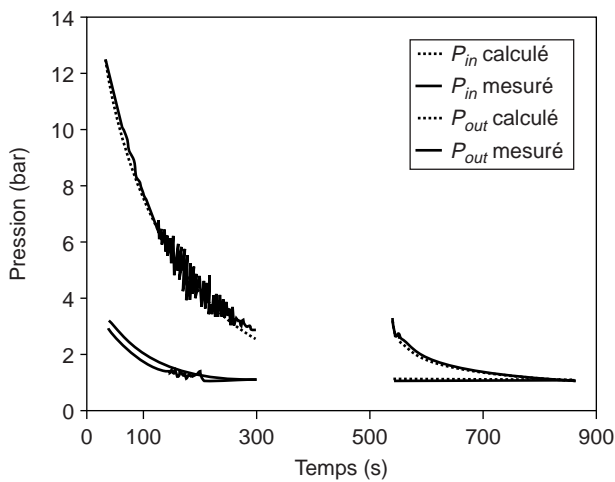


Figure 16

Évolution des pressions aux extrémités de la conduite de diamètre  $D_3$ : comparaison des résultats du modèle avec les données du test 14 de DNV ( $x = 0,9$ ).

*Variation in pressure at the ends of the duct of diameter  $D_3$ : comparison of the results of the model with DNV's test 14 data ( $x = 0,9$ ).*

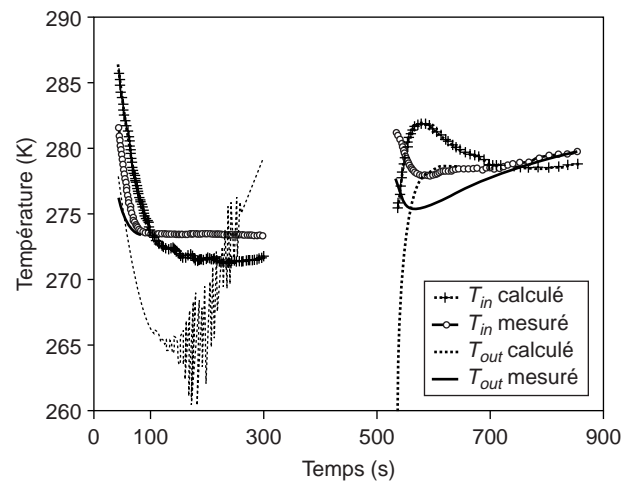


Figure 17

Évolution des températures aux extrémités de la conduite de diamètre  $D_3$ : comparaison des résultats du modèle avec les données du test 14 de DNV ( $x = 0,9$ ).

*Variation in temperature at the ends of the duct of diameter  $D_3$ : comparison of the results of the model with DNV's test 14 data ( $x = 0,9$ ).*

Pour cet essai, on remarque de nouveau qu'au début de la décharge (temps < 100 s, figure 16), la pression à la sortie du conduit de diamètre  $D_3$  est bien supérieure à la pression atmosphérique indiquant que, dans ces conditions, le phénomène d'écoulement doublement critique se manifeste.

Les prédictions satisfaisantes du présent modèle incitent à penser que l'hypothèse d'homogénéité cinématique des phases constitue une approximation raisonnable pour les écoulements compressibles à grande vitesse. En effet, dans ces conditions, l'énergie turbulente contribue à disperser finement les phases. La grande aire interfaciale engendrée favorise les échanges de quantité de mouvement et donc l'homogénéisation de l'écoulement. Par ailleurs, la prise en compte du transfert de chaleur du fluide avec le milieu extérieur constitue une amélioration possible de la précision du calcul de l'écoulement multicritique. Bien que la procédure de calcul risque d'être quelque peu alourdie par la prise en compte de ce transfert thermique, les concepts fondamentaux à la base du formalisme de la multicriticité présenté dans cet article restent inchangés.

## CONCLUSION

L'écoulement diphasique compressible gaz-liquide en régime permanent adiabatique à travers une conduite de section constante est étudié au point de vue thermodynamique. Le traitement des lois physiques de conservation a permis de déduire une formulation analytique de l'évolution subie par le fluide homogène. En se basant sur la forme différentielle de cette formulation et le second principe de la thermodynamique, les propriétés de cette évolution sont discutées pour les régimes subcritique et supercritique. La limite de Fanno associée à cet écoulement correspond à une longueur maximale de conduite qui est fonction du titre massique et des conditions initiales. Au-delà de cette longueur maximale, l'écoulement considéré n'est plus possible mais il s'établit un écoulement permanent caractérisé par un autre débit massique.

La théorie permet l'analyse du problème important de la possibilité d'existence d'états multicritiques dans les circuits de transport présentant des singularités géométriques. En considérant un circuit simplifié de décharge comportant un seul élargissement brusque de section, le critère d'existence d'un écoulement doublement critique est développé. On montre que ce critère

contient une condition de nature entropique en relation avec la longueur maximale ainsi qu'une condition sur la pression de stagnation dans le réservoir aval.

L'existence des différentes configurations critiques est discutée sur la base de ce critère.

Les résultats de simulations fournis par le modèle ont été comparés avec succès aux données expérimentales de DNV obtenues pour des écoulements d'azote pur et de mélange eau-azote à travers une ligne de décharge comportant une cascade de quatre élargissements brusques. Les prédictions satisfaisantes du modèle tendent à prouver que l'hypothèse d'homogénéité cinématique du mélange gaz-liquide constitue une approximation raisonnable dans le cas des écoulements à grande vitesse. Néanmoins, la différence observée entre les prédictions et les données de la température semble indiquer que la présente théorie peut être améliorée en prenant en considération les transferts de chaleur avec le milieu extérieur. Enfin, le modèle proposé dans ce travail peut s'appliquer aux écoulements gaz-solide à grains dispersés.

## REMERCIEMENTS

L'auteur remercie la *Commission de l'Union européenne* qui a soutenu financièrement la présente étude dans le cadre du programme *Environnement*. L'auteur remercie également L. Bolle, J. M. Seynhaeve et A. Fritte pour leurs fructueuses discussions.

## NOMENCLATURE

|            |   |                        |
|------------|---|------------------------|
| $A$        | section droite de la conduite   | (m <sup>2</sup> )      |
| $a_s$      | vitesse du son isentropique du gaz parfait                                | (m/s)                  |
| $c_p, c_v$ | chaleur massique respectivement à pression constante et à volume constant | (J/K·kg)               |
| $Cst_0$    | invariant de l'évolution de Fanno subie par le mélange                    | (J/Kg)                 |
| $D$        | diamètre de la conduite   | (m)                    |
| $G$        | vitesse massique définie par $M/A$  | (kg/m <sup>2</sup> ·s) |
| $h$        | enthalpie massique  | (J/kg)                 |
| $M$        | débit massique  | (kg/s)                 |
| $Me$       | nombre de Mach effectif défini par $W/V_{son}$                            | (-)                    |
| $Me^*$     | nombre de Mach effectif particulier défini par la relation (23b)          | (-)                    |

|           |   |          |
|-----------|---|----------|
| $p$       | pression moyennée dans la section droite de la conduite                   | (Pa)     |
| $p_R$     | pression de stagnation régnant dans le réservoir aval                     | (Pa)     |
| $q_0$     | paramètre apparaissant dans la formule de $(\lambda L/D)_{Max}$           | (-)      |
| $R$       | constante des gaz parfaits, donnée par $(c_{pG} - c_{vG})$                | (J/K·kg) |
| $s$       | entropie massique   | (J/K·kg) |
| $T$       | température absolue   | (K)      |
| $V_{son}$ | vitesse du son dans un milieu diphasique homogène                         | (m/s)    |
| $W$       | vitesse axiale moyennée dans la section droite de la conduite             | (m/s)    |
| $x$       | titre massique défini par $M_G/M$   | (-)      |
| $z$       | position de la section courante $A$ par rapport à l'entrée de la conduite | (m).     |

### Symboles grecs

|  |   |  |
|--|---|--|
| $\alpha$                               | taux de vide global défini par $A_G/A$ où $A_G$ est la portion de $A$ occupée en moyenne dans le temps par la phase gazeuse | (-)  |
| $\alpha^*$                             | taux de vide particulier défini par la relation (23a)   | (-)  |
| $\gamma, \kappa, \beta$                | paramètres définis respectivement par $c_{pG}/c_{vG}, c_{pL}/c_{pG}, \rho_L/\rho_G$   | (-)  |
| $\rho$                                 | masse volumique   | (kg/m <sup>3</sup> )                               |
| $\tau_p$                               | contrainte de cisaillement pariétale  | (Pa)   |
| $\omega$                               | vitesse adimensionnelle définie par $W/a_S$   | (-)  |
| $\lambda$                              | coefficient de perte de charge de Fanning   | (-)  |
| $\varphi, \psi$                        | paramètres sans dimension apparaissant dans l'équation (25)   | (-)  |
| $\xi_{Max} \equiv (\lambda L/D)_{Max}$ | paramètre de perte de charge maximum  | (-)  |
| $\sigma$                               | rapport de section de l'élargissement brusque   | (-)  |
| $\tau_c^2$                             | rapport de température $T_s/T_1$  | (-)  |
| $\Lambda$                              | paramètre fonction de $\gamma, \kappa$ et $x$   | (-)  |
| $\Pi$                                  | grandeur définie par l'équation (13)  | (kg <sup>2</sup> /m <sup>4</sup> ·s <sup>2</sup> ) |
| $\Omega_0$                             | paramètre apparaissant dans la formule (29) de $(\lambda L/D)_{Max}$  | (-)  |
| $\Delta s_{1-s}$                       | variation d'entropie massique entre les sections critiques $A_1$ et $A_s$   | (J/K·kg)   |
| $\wp_{Max}$                            | borne supérieure de $(\lambda L/D)_{Max}$   | (-).   |

### Indices

|           |  |
|-----------|--|
| 1, 2, $s$ | indices relatifs aux conditions régnant respectivement aux sections $A_1, A_2$ et $A_s$ définies à la figure 5 |
| 0         | indice relatif aux conditions de référence   |
| $m$       | relatif aux propriétés du mélange  |
| $G, L$    | indices relatifs respectivement à la phase gazeuse et liquide  |
| $H$       | relatif au mélange homogène.   |

### RÉFÉRENCES

- 1 Alimonti C. (1995) Étude de l'écoulement critique de mélanges polyphasiques dans des scénarios d'accident de relâchement. *Thèse de doctorat en sciences appliquées*, université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve.
- 2 Morris S.D. (1990) Flashing flow through relief lines, pipe breaks and cracks. *J. Loss Prevention Process Ind.*, 3, 17-26.
- 3 Bilicki Z. et Kestin J. (1983) Two-phase flow in a vertical pipe and the phenomenon of choking: homogeneous diffusion model-I. *Int. Journal Multiphase Flow*, 9, 3, 269-288.
- 4 Vromman T. (1988) Modélisation des écoulements critiques diphasiques dans un homogénéisateur de fluides pétroliers. *Thèse de doctorat en sciences appliquées*, université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve.
- 5 Yan F. et Giot M. (1991) A nucleation model for superheated liquids in adiabatic vessels and pipes. *Multiphase Flow and Heat Transfert*, Éd. X.J. Cien et al., Hemisphere.
- 6 Lemmonier H. et Selmer-Olsen S. (1989) Theoretical and experimental investigation of two-component two-phase critical flow in a convergent-divergent nozzle. *European Two-phase Flow Group Meeting*, Paris.
- 7 Attou A. et Franco J. (1996) Simple and double choked two-phase flow through sudden enlargements: an experimental study. *2nd European Thermal-Science Conference*, 1373-1380, Rome.
- 8 *DNV Technical Report N° 96-2002* (1996) Pressure Relief/Blowdown Experiments-Test Matrix and Data Records. Communication privée.
- 9 Herringe R.A. et Davis M.R. (1978) Flow structure and distribution effects in gas-liquid mixture flows. *Int. J. Mult. Flow*, 4, 461-486.
- 10 Husain A. (1975) The applicability of the homogeneous flow model to two-phase flow. Ph.D. *Thesis*, université de Cincinnati.
- 11 Giot M. et Meunier D. (1968) Méthodes de détermination du débit critique en écoulements monophasiques et diphasiques à un constituant. *EPE*, IV, 1-2, 47-67.
- 12 Fritte A. (1974) Vitesse de propagation de petites perturbations dans les écoulements diphasiques liquide-gaz. *Thèse de doctorat en sciences appliquées*, université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve.
- 13 Bouré J.A., Fritte A., Giot M. et Réocreux M.L. (1976) Highlights of two-phase critical flow on the links between maximum flow rates, sonic velocities, propagation and transfer phenomena in single and two-phase flows. *Int. J. Mult. Flow*, 13, 1-22.

- 14 Houberechts A. (1976) *La thermodynamique technique*, tomes I et II, Ceuterick, Louvain.
- 15 Barna P.S. (1957) *Fluid Mechanics for Engineers*, Butterworths Publication Limited.
- 16 Benedict R.P., Wyler J.S., Dudek J.A. et Gleed A.R. (1976) A generalized flow across an abrupt enlargement. *J. Engineering for Power*, Trans. ASME, 327-334.
- 17 Marjanovic P. et Djordjevic V. (1994) On the compressible flow losses through abrupt enlargements and contractions. *J. Fluids Engineering*, Trans. ASME, 116, 756-762.
- 18 Benedict R.P. (1980) *Fundamentals of Pipe Flow*, Wiley Interscience Publication, Ed. John Wiley, Sons Inc.
- 19 Attou A., Giot M. et Seynhaeve J.M. (1997) Modelling of steady state two-phase bubbly flow through a sudden enlargement. *Int. J. Mass and Heat Transfer*, 40, 14, 3375-3385.
- 20 Attou A. (1997) Les écoulements diphasiques critiques et subcritiques à travers les singularités - Tomes I et II. *Thèse de doctorat en sciences appliquées*, université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve.
- 21 Attou A. et Seynhaeve J.M. (1998) Computation of steady-state multiple choked compressible flow: an analytical solution for single-phase and two-phase two-component flow. *J. of Loss Prevention in the Process Ind.* (à paraître).

*Manuscrit final reçu en octobre 1998*