

PRISE EN COMPTE DES NON-LINÉARITÉS GÉOMÉTRIQUES DANS LA MODÉLISATION DE LA COMPACTION DES SÉDIMENTS

E. BOURGEOIS et L. DORMIEUX

ENPC - CERCSO

Les contributions successives de différents auteurs ont permis d'identifier les phénomènes mis en jeu dans la compaction des sédiments, puis de proposer des modélisations mécaniques cohérentes de ce processus. On s'intéresse ici aux non-linéarités géométriques dues à la forte diminution de la porosité: elles imposent de renoncer à employer la déformation de Green-Lagrange linéarisée. On adopte une loi de comportement adaptée aux grandes transformations d'un milieu poreux élastique dont les constituants sont incompressibles pour étudier la diminution de porosité liée aux phénomènes purement mécaniques intervenant dans la compaction.

GEOMETRICAL NON-LINEARITIES IN THE MODELLING OF COMPACTION

The numerous works devoted to the phenomena involved in the compaction of sediments have led to a good understanding and to mechanically consistent modellings of this process. During compaction, large reduction of porosity occurs and the sediments undergo large strains: in this context, the usual linearized Green-Lagrange strain tensor is no longer relevant. Using the constitutive law of a poroelastic medium (made of incompressible constituents) at large strains, we discuss the influence of geometrical non-linearities in the study of purely mechanical compaction.

INTEGRACIÓN DE LAS NO LINEALIDADES GEOMÉTRICAS EN LA MODELIZACIÓN DE LA COMPACTACIÓN DE LOS SEDIMENTOS

Las contribuciones sucesivas de diversos autores han permitido identificar los fenómenos que intervienen en la compactación de los sedimentos, para, acto seguido, proponer las modelizaciones mecánicas coherentes de este proceso. También se entra en materia acerca de las no linealidades geométricas derivadas de la elevada disminución de la porosidad, que imponen renunciar al empleo de la deformación de Green-Lagrange linealizada. Se adopta una ley de comportamiento adaptada a las grandes transformaciones de un medio poroso elástico cuyos componentes son incompresibles, para así estudiar la disminución de porosidad vinculada con los fenómenos meramente mecánicos que intervienen en la compactación.

(1) Laboratoire de Mécanique des Solides (URA 317 CNRS)
ENPC-CERCSO,
6 et 8, avenue Blaise Pascal
Cité Descartes, Champs-sur-Marne
77455 Marne-la-Vallée Cedex 2 - France

INTRODUCTION

Au voisinage des zones de déflexion de la lithosphère, le fond marin peut posséder une profondeur suffisante pour permettre la formation d'un bassin sédimentaire. Dans ce type de structure, la porosité diminue avec la profondeur à un instant donné, et diminue au cours du temps pour une couche de sédiments que l'on suit dans son mouvement. Dans le phénomène de réduction de porosité, on distingue en général une origine purement mécanique (déformation liée au réarrangement des grains) et une origine physicochimique (phénomène de pression-dissolution) intervenant en général à une plus grande profondeur — voir par exemple, Hedberg (1936) ou Hamilton (1959). En termes de porosité, il est possible de considérer qu'il existe un seuil au-dessus duquel le phénomène de déformation mécanique prédomine et au-dessous duquel c'est le phénomène de pression-dissolution qui contrôle l'évolution du système.

Plusieurs modèles de comportement de bassins prenant en compte les deux origines de la réduction de porosité mentionnées précédemment ont été proposés — par exemple par Schneider *et al.* (1994). Il semble cependant que les non-linéarités « géométriques » dues aux changements de géométrie survenant au cours de la compaction n'aient pas en général été prises en considération: le présent article leur est consacré. Pour simplifier, on ne s'intéressera ici qu'à l'aspect mécanique de la réduction de porosité, sans considérer l'influence des phénomènes chimiques.

Alors que Athy (1930) proposait de décrire la sédimentation au moyen d'une relation entre porosité et profondeur, les travaux de Terzaghi (1923) ont amené à considérer la porosité comme une fonction de la « contrainte effective » définie comme la somme (algébrique) de la contrainte totale et de la pression du fluide: Hubbert et Rubey (1959), Smith (1971) et d'autres ont utilisé ce concept pour l'étude de la compaction. On se propose de discuter, en utilisant le formalisme de la mécanique des milieux poreux saturés, la validité d'une telle formulation lorsque le milieu étudié subit des transformations géométriques qui sortent du cadre usuel des petites perturbations. Bien que le phénomène de la compaction soit clairement irréversible, on utilisera ici une loi de comportement poroélastique, en admettant que le phénomène de compaction se traduise localement par une décroissance *monotone* de la porosité.

1 COMPORTEMENT D'UN MILIEU POREUX ÉLASTIQUE EN TRANSFORMATION FINIE

On rappelle d'abord les principes de la modélisation des milieux poreux saturés due à Biot (1955), puis Coussy (1991), puis la démarche permettant d'établir les relations de comportement d'un milieu poreux élastique qui subit de grandes transformations géométriques (Bourgeois et Dormieux, 1996).

1.1 Formalisme de la mécanique des milieux poreux

Un milieu poreux saturé est un matériau constitué d'une matrice solide et d'un espace poreux saturé par un fluide. Dans le formalisme présenté ici, un tel milieu est considéré comme la superposition de deux milieux continus, appelés squelette et fluide: à chaque instant, deux particules matérielles, l'une de squelette, l'autre de fluide, sont donc situées en chaque point de l'espace géométrique, chacune étant animée d'un mouvement qui lui est propre.

Les mouvements du squelette, qui représente à l'échelle macroscopique la matrice solide, sont décrits de manière lagrangienne: ayant fait le choix d'une configuration particulière du squelette comme configuration de référence, on repère chaque particule de squelette par ses coordonnées cartésiennes lagrangiennes (X, Y, Z) , c'est-à-dire les coordonnées du point M_0 où elle se trouve dans la configuration de référence. Les coordonnées eulériennes (x, y, z) de la même particule donnent la position du point géométrique M où elle est située dans la configuration actuelle (à l'instant t). On note $\underline{\xi}(X, Y, Z, t) = \underline{\underline{M}}_0 M$ le déplacement correspondant, et $\underline{\underline{F}}$ le gradient de la transformation géométrique du squelette:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\xi} \quad (1)$$

où l'opérateur $\underline{\underline{\text{Grad}}}$ agit sur les coordonnées lagrangiennes. On désigne par $J = \det \underline{\underline{F}}$ la dilatation volumique dans la transformation du squelette et l'on introduit le tenseur de déformations de Green-Lagrange $\underline{\underline{e}}$:

$$\underline{\underline{e}} = 1/2 (\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}) \quad (2)$$

La description de la cinématique du fluide est différente. Le mouvement d'une particule de fluide donnée ne nous intéresse que dans la mesure où celle-ci

interagit avec la particule de squelette située au même point dans la configuration actuelle: on définit donc sur la configuration actuelle le vecteur eulérien courant relatif de masse fluide \underline{w} par:

$$\underline{w} = \rho^f \phi \underline{u}_r \quad (3)$$

où ρ^f désigne la masse volumique du fluide et ϕ la porosité du milieu, c'est-à-dire la fraction du volume total occupée par le fluide. \underline{u}_r désigne la vitesse relative du fluide par rapport au squelette, c'est-à-dire la différence entre les vitesses eulériennes absolues des particules de fluide et de squelette situées au même point.

On introduit ensuite le concept d'apport de masse fluide dû à Biot: considérons une particule de squelette, qui occupe dans la configuration de référence le volume élémentaire $d\Omega_o$. Dans la configuration actuelle, elle occupe un volume égal à $d\Omega_t = J d\Omega_o$. On note $m d\Omega_o$ la variation de masse fluide entre $d\Omega_o$ et $d\Omega_t$; il est facile de voir que:

$$m = \rho^f J \phi - \rho_o^f \phi_o \quad (4)$$

où ρ_o^f et ϕ_o désignent respectivement les valeurs de ρ^f et ϕ dans la configuration de référence. La grandeur m porte le nom d'apport de masse fluide. Il résulte alors classiquement de la conservation de la masse fluide que l'on a :

$$\dot{m} + J \operatorname{div} \underline{w} = 0 \quad (5)$$

où div représente l'opérateur divergence agissant sur les coordonnées eulériennes, et le point ($\dot{\quad}$) désigne une dérivation particulière en suivant le squelette.

Comme pour un milieu continu monophasique, la conservation de la quantité de mouvement conduit à l'existence d'un tenseur symétrique défini sur la configuration actuelle et représentant les efforts intérieurs dans le milieu poreux. Il est noté $\underline{\sigma}$, porte le nom de tenseur des contraintes totales de Cauchy et vérifie:

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + r \underline{g} = 0 \quad (6)$$

où r désigne la densité moyenne du milieu poreux et \underline{g} l'accélération de la pesanteur, lorsque les termes d'inertie sont négligeables.

La loi de conduction de la masse fluide que l'on adopte dans la suite est la loi de Darcy; lorsque les forces d'inertie s'exerçant sur le fluide sont négligeables, celle-ci s'écrit:

$$\underline{w} / \rho^f = \underline{k} \cdot (- \operatorname{grad} p + \rho^f \underline{g}) \quad (7)$$

où p désigne la pression du fluide dans le milieu poreux (ou pression de pore), et \underline{k} le tenseur de perméabilité (grad désigne l'opérateur gradient relatif aux coordonnées eulériennes).

Il reste à préciser la loi de comportement du milieu poreux, c'est-à-dire les équations reliant les déformations du squelette et l'apport de masse fluide aux contraintes s'exerçant sur le milieu poreux et à la pression du fluide. C'est l'objet du paragraphe suivant.

1.2 Lois d'état du matériau poroélastique

Considérons une particule de squelette qui occupe un volume élémentaire $d\Omega_o$ dans la configuration de référence et un volume $d\Omega_t$ dans la configuration actuelle. On s'intéresse au système matériel constitué par cette particule de squelette et à la particule de fluide située dans le volume $d\Omega_t$; il s'agit d'un système ouvert. Introduisant la densité volumique lagrangienne d'énergie libre Ψ pour ce système, on obtient en combinant les deux premiers principes de la thermodynamique l'inégalité suivante, qui généralise l'inégalité de Clausius-Duhem au cas d'un milieu multiphasique (Coussy, 1991):

$$D = J \underline{\sigma} : \underline{d} + g_m \dot{m} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (8)$$

où D désigne la dissipation intrinsèque volumique lagrangienne, \underline{d} le taux de déformation eulérien du squelette, et g_m l'enthalpie libre spécifique du fluide (\underline{a} et \underline{b} désignant deux tenseurs du second ordre, la notation $\underline{a} : \underline{b}$ représente le produit doublement contracté $a_{ij} b_{ji}$). Pour toute évolution isotherme du fluide, g_m est une fonction de la pression p , et l'équation d'état du fluide s'écrit:

$$\frac{1}{\rho^f} = \frac{dg_m}{dp}(p) \quad (9)$$

Les lois d'état du milieu poroélastique découlent alors des deux hypothèses suivantes: on suppose, d'une part, que la dissipation intrinsèque D est nulle dans toute évolution du milieu et, d'autre part, que Ψ ne dépend que des deux variables d'état \underline{e} et m . Compte tenu de la relation liant les taux de déformation eulérien \underline{d} et lagrangien $\underline{\dot{e}}$:

$$\underline{\dot{e}} = {}^t \underline{F} \cdot \underline{d} \cdot \underline{F} \quad (10)$$

on montre alors à partir de (8) que, dans toute évolution du milieu poreux, on a (Coussy, 1991):

$$\underline{\underline{\pi}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{e}}}(\underline{\underline{e}}, m) \quad (11)$$

$$g_m = \frac{\partial \Psi}{\partial m}(\underline{\underline{e}}, m) \quad (12)$$

où $\underline{\underline{\pi}}$ désigne le tenseur lagrangien des contraintes de Piola-Kirchhoff défini par la formule de transport

$$\underline{\underline{\pi}} = \underline{\underline{JF}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot {}^t\underline{\underline{F}}^{-1}. \left(\text{La notation } \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{e}}} \text{ désigne le tenseur de composantes } \frac{\partial \Psi}{\partial e_{ij}} \right).$$

Différentiant les équations d'état (11) et (12), on obtient:

$$d\underline{\underline{\pi}} = \underline{\underline{C}} : d\underline{\underline{e}} - M\underline{\underline{B}} \frac{dm}{\rho^f} \quad (13)$$

$$dg_m = \frac{M}{\rho^f} \left(-\underline{\underline{B}} : d\underline{\underline{e}} + \frac{dm}{\rho^f} \right) \quad (14)$$

où M , $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{C}}$ sont définis par:

$$M = (\rho^f)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial m \partial m}(\underline{\underline{e}}, m)$$

$$-M\underline{\underline{B}}/\rho^f = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \underline{\underline{e}} \partial m}(\underline{\underline{e}}, m) \quad (15)$$

$$\underline{\underline{C}} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \underline{\underline{e}} \partial \underline{\underline{e}}}(\underline{\underline{e}}, m)$$

Lorsque $\dot{m} = 0$, on dit que l'évolution du milieu poreux est « non drainée » et, compte tenu de (13), on donne à $\underline{\underline{C}}$ le nom de tenseur des modules d'élasticité tangents « non drainés ».

Il est habituel d'éliminer l'enthalpie libre spécifique du fluide g_m au profit de la pression p . À cet effet, on utilise l'équation d'état du fluide pour réécrire (14) sous la forme:

$$dp = M \left(-\underline{\underline{B}} : d\underline{\underline{e}} + \frac{dm}{\rho^f} \right) \quad (16)$$

En éliminant dm entre (13) et (16) on obtient:

$$d\underline{\underline{\pi}} = \underline{\underline{C}}_o : d\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{B}} dp \quad (17)$$

où

$$\underline{\underline{C}}_o = \underline{\underline{C}} - M\underline{\underline{B}} \otimes \underline{\underline{B}}$$

Les évolutions dans lesquelles $\square \dot{p} = 0$ étant dites « drainées », $\underline{\underline{C}}_o$ s'interprète comme le tenseur des modules d'élasticité tangents « drainés ». Les équations (13) et (16) — ou de manière équivalente (17) et (16) — définissent le comportement élastique non linéaire du milieu poreux en transformation finie.

Sur la base de la relation biunivoque (9) existant entre g_m et p , p peut être considéré, compte tenu de (12), comme une fonction de $\underline{\underline{e}}$ et m :

$$p = p(\underline{\underline{e}}, m) \quad (18)$$

Éliminant m entre (11) et (18), $\underline{\underline{\pi}}$ apparaît à présent comme une fonction de $\underline{\underline{e}}$ et p . Il est alors utile de noter que l'on a l'identité suivante, déduite de (17):

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \underline{\underline{\pi}}}{\partial \underline{\underline{e}}} \right) = \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{e}}} \left(\frac{\partial \underline{\underline{\pi}}}{\partial p} \right) \Leftrightarrow \frac{\partial \underline{\underline{C}}_o}{\partial p} = - \frac{\partial \underline{\underline{B}}}{\partial \underline{\underline{e}}} \quad (19)$$

1.3 Formulation du comportement « en contraintes effectives »

1.3.1 Contraintes effectives en poroélasticité infinitésimale

Dans le cas où les déformations sont infinitésimales ($|\underline{\underline{grad}} \xi| \ll 1$), il est habituel d'identifier le tenseur de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{\pi}}$ au tenseur de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ et le tenseur de Green-Lagrange $\underline{\underline{e}}$ au tenseur linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$: en particulier (17) s'écrit alors:

$$d\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}_o : d\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{B}} dp \quad (20)$$

Dans ce cadre d'hypothèses (qui suppose en particulier que les contraintes demeurent petites devant les modules non drainés $\underline{\underline{C}}_o$), si les tenseurs $\underline{\underline{C}}_o$ et $\underline{\underline{B}}$ gardent des valeurs constantes, (20) peut s'intégrer et donne:

$$\Delta(\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{B}}p) = \underline{\underline{C}}_o : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (21)$$

où $\Delta(\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{B}}p)$ désigne la différence entre les valeurs actuelle et initiale du tenseur $\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{B}}p$, couramment employé en géomécanique et appelé « tenseur des contraintes effectives ». Le résultat important en pratique est que ce tenseur est une fonction de la seule déformation du squelette $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Dans le cas particulier où le solide qui constitue le squelette est incompressible (à l'échelle microscopique), il a été établi — voir par exemple Coussy (1991) — que $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{1}}$. Le tenseur des

contraintes effectives se réduit alors au tenseur $\underline{\underline{\sigma}} + p\underline{\underline{1}}$, initialement introduit par Terzaghi.

On voit sans peine que l'existence d'un tenseur de contraintes effectives fonction seulement de la déformation du squelette subsiste si $\underline{\underline{B}}$ est constant et $\underline{\underline{C}}_o$ est une fonction de $\underline{\underline{\varepsilon}}$. On obtient alors une formulation, fréquemment employée dans le contexte de la sédimentation, qui rend compte de la non-linéarité du comportement à travers l'emploi de modules d'élasticité tangents variables, sans pour autant prendre en compte la non-linéarité propre au changement de géométrie.

1.3.2 Contraintes effectives en poroélasticité finie

Considérons maintenant le cas où le squelette subit de grandes transformations. On s'intéresse à la valeur du tenseur $\underline{\underline{B}}$ en fonction de $\underline{\underline{e}}$ et p , dans le cas particulier où le solide constituant le squelette est incompressible. Cette propriété se traduit par la condition:

$$J(1 - \phi) = (1 - \phi_o) \quad (22)$$

D'autre part, en introduisant le module de compressibilité du fluide $K_w(p)$, l'équation d'état (9) peut s'écrire:

$$\frac{d\rho^f}{\rho^f} = \frac{dp}{K_w(p)} \quad \left(\text{où } K_w(p) = - \frac{dg_m/dp}{d^2g_m/dp^2} \right) \quad \square \quad (23)$$

Différentiant (4), on obtient:

$$dm = \rho^f d(J\phi) + J\phi d\rho^f \quad (24)$$

Portant alors (22) et (23) dans (24) on montre que l'on a:

$$dm = \rho^f \left(\frac{\partial J}{\partial \underline{\underline{e}}} : d\underline{\underline{e}} + (J - (1 - \phi_o)) \frac{dp}{K_w} \right) \quad (25)$$

La compatibilité de cette expression de dm , qui résulte uniquement d'informations disponibles sur les constituants à l'échelle microscopique, indépendamment de toute hypothèse thermodynamique formulée sur le comportement du milieu poreux, avec l'expression de dm déduite de (16), obtenue dans le cadre d'une modélisation macroscopique du milieu poreux en supposant que la dissipation intrinsèque est nulle et que Ψ ne dépend que de $\underline{\underline{e}}$ et m , permet d'identifier les coefficients $\underline{\underline{B}}$ et M :

$$M = \frac{K_w(p)}{J(\underline{\underline{e}}) - (1 - \phi_o)} \quad (26)$$

$$\underline{\underline{B}} = \frac{\partial J}{\partial \underline{\underline{e}}}(\underline{\underline{e}}) = J(\underline{\underline{1}} + 2\underline{\underline{e}})^{-1} = J(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}})^{-1} \quad (27)$$

(27) exprime que $\underline{\underline{B}}$ n'est fonction que de la déformation du squelette, et ne dépend pas de la pression du fluide. On voit alors par (19) que le tenseur $\underline{\underline{C}}_o$ dépend de manière affine de la pression p , ce qui s'écrit:

$$\underline{\underline{C}}_o(\underline{\underline{e}}, p) = -p \frac{\partial \underline{\underline{B}}}{\partial \underline{\underline{e}}} + \underline{\underline{C}}_o^*(\underline{\underline{e}}) \quad (28)$$

où $\underline{\underline{C}}_o^*$ est le tenseur des modules d'élasticité « drainés » pour une pression nulle. Compte tenu de (28), (17) donne:

$$d(\underline{\underline{\pi}} + \underline{\underline{B}}p) = \underline{\underline{C}}_o^*(\underline{\underline{e}}) : d\underline{\underline{e}} \quad (29)$$

qui fait apparaître clairement le fait que le tenseur des contraintes effectives de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{\pi}} + \underline{\underline{B}}p$ n'est fonction que de la déformation du squelette, et ne dépend pas de la pression du fluide:

$$\underline{\underline{\pi}}(\underline{\underline{e}}, p) + \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{e}})p = \underline{\underline{\pi}}(\underline{\underline{e}}, p = 0) \quad (30)$$

On montre alors sans peine en portant dans (30) la relation (27) et la formule de transport entre $\underline{\underline{\pi}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ que le résultat subsiste en termes de contraintes de Cauchy, si bien que le tenseur des contraintes effectives de Terzaghi apparaît comme une fonction de la seule transformation géométrique du squelette (c'est-à-dire du tenseur $\underline{\underline{F}}$), et ne dépend pas de la pression du fluide p :

$$\underline{\underline{\sigma}} + p\underline{\underline{1}} = \frac{1}{J} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\pi}}(\underline{\underline{e}}, p = 0) \cdot \underline{\underline{F}} \quad (31)$$

2 APPLICATION AU PROBLÈME DE LA COMPACTION UNIDIMENSIONNELLE DE SÉDIMENTS

2.1 Position du problème

On considère une couche de sédiments en cours de formation que l'on modélise comme un massif de milieu poreux d'extension infinie dans les directions horizontales, reposant sur un plan horizontal rigide et imperméable que l'on prend comme origine pour la coordonnée verticale z . La couche est limitée supérieurement par le plan $z = h(t)$, et soumise à l'action du champ de pesanteur $\underline{\underline{g}} = -g \underline{\underline{e}}_z$. On note $M_d(t)$ la masse

de sédiments déposés par unité de surface de fond sous-marin, que l'on considère comme une donnée du problème. On note enfin $L(t)$ la hauteur de la colonne d'eau au-dessus du milieu poreux: la surface de la mer est donc située dans le plan $z = h(t) + L(t)$.

Dans tout ce qui suit, on néglige les accélérations du squelette et du fluide, et l'on suppose que toutes les grandeurs physiques sont indépendantes des coordonnées x et y ; on recherche le champ eulérien des vitesses des particules de squelette \underline{u} et le vecteur courant relatif de masse fluide \underline{w} sous la forme:

$$\underline{u} = u(z, t) \underline{e}_z \quad (32)$$

$$\underline{w} = w(z, t) \underline{e}_z \quad (33)$$

Le taux de déformation eulérien du squelette \underline{d} est alors donné par:

$$\underline{d} = \frac{\partial u}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (34)$$

et le champ de contraintes de Cauchy dans le milieu poreux est cherché sous la forme:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma(z, t) \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z + \sigma_1(z, t)(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) \quad (35)$$

Il sera commode, pour étudier l'évolution d'une particule de squelette donnée, de prendre comme état de référence celui du milieu poreux à la surface: compte tenu de la forme (32) du champ de vitesses du squelette, le gradient de la transformation du squelette est donné par:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \lambda \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (36)$$

où λ désigne la dilatation du squelette dans la direction verticale (égale ici à sa dilatation volumique): λ vaut 1 en tout point du plan $z = h(t)$ et est lié au champ u par la relation:

$$\dot{\lambda}/\lambda = \text{div } \underline{u} = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (37)$$

Les conditions aux limites hydrauliques et mécaniques du problème s'écrivent:

$$u(z = 0, t) = 0 \quad (38)$$

$$w(z = 0, t) = 0 \quad (39)$$

$$\sigma(z = h(t), t) = -p(z = h(t), t) = -\rho^f g L(t) \quad (40)$$

Compte tenu de (7), (39) s'écrit aussi:

$$\frac{\partial p}{\partial z}(z = 0, t) + \rho^f g = 0 \quad (41)$$

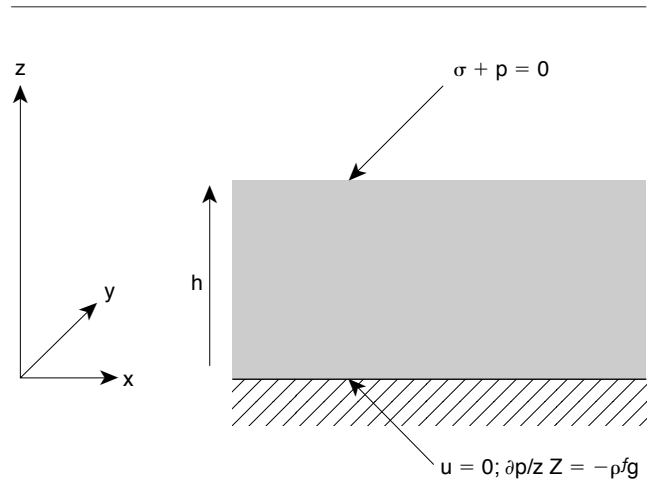


Figure 1
Géométrie du problème et conditions aux limites.
Geometry and boundary conditions.

On suppose que la couche est isotrope transverse. En outre, on fait l'hypothèse que les deux constituants solide et fluide du milieu poreux peuvent être considérés comme incompressibles. La masse volumique du solide est donc une constante, notée ρ^s . On note ρ la masse volumique apparente du squelette, définie par:

$$\rho = \rho^s(1 - \phi) \quad (42)$$

On suppose qu'à la surface supérieure de la couche $z = h(t)$, où la contrainte effective verticale demeure nulle à tout instant, la porosité conserve une valeur constante notée ϕ_o . La masse volumique apparente du squelette à la surface $z = h(t)$ est alors également constante, et égale $\rho_o = \rho^s(1 - \phi_o)$.

En multipliant par ρ^s la relation (22) qui traduit l'incompressibilité du solide, on obtient:

$$\lambda \rho = \rho_o \quad (43)$$

Rapprochant (42) et (43), on montre que la porosité devient une fonction biunivoque de la dilatation λ :

$$\phi = 1 - \rho_o/(\lambda \rho^s) \quad (44)$$

Par ailleurs, le fluide saturant est incompressible: sa masse volumique est donc une constante notée ρ^f . Il résulte alors de (4) et (22) que l'on a:

$$m = \rho^f(\lambda - 1) \quad (45)$$

et la conservation de la masse fluide (5) s'écrit donc:

$$\rho^f \dot{\lambda} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (46)$$

On observe que (37) et (46), avec les conditions \square (38) et (39), conduisent à:

$$\frac{\partial(w + \rho^f u)}{\partial z} = 0 \Rightarrow \forall t \forall z \quad w + \rho^f u = 0 \quad (47)$$

Il reste à relier l'évolution de la géométrie de la couche, c'est-à-dire $h(t)$, à l'apport de matériau en surface. L'épaisseur de la couche et la masse de sédiments déposée à l'instant t sont liées par le bilan de masse de squelette:

$$M_d(t) = \int_{z=0}^{z=h} \rho(z, t) dz \quad (48)$$

L'équation de continuité eulérienne pour le squelette

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = 0 \quad (49)$$

conduit alors, après dérivation de (48), à l'équation:

$$\dot{h}(t) = u(z = h(t), t) + \dot{M}_d(t)/\rho_o \quad (50)$$

En ce qui concerne les équations d'état du milieu poreux, l'incompressibilité du solide assure que le comportement s'écrit en contraintes effectives, c'est-à-dire que le tenseur des contraintes effectives de Terzaghi est fonction de la seule transformation macroscopique du squelette et ne dépend pas de la pression du fluide. Dans une sollicitation de type œdométrique, la seule variable caractérisant localement la transformation est la dilatation verticale λ , si bien que la loi de comportement prend la forme suivante:

$$\sigma + p = Q(\lambda) \quad (51)$$

où $Q(\lambda)$ est une fonction scalaire qui demeure à déterminer expérimentalement (par exemple dans un essai de compression œdométrique drainé, c'est-à-dire dans lequel la pression du fluide dans tout l'échantillon est maintenue homogène et constante). On adopte ici la convention de signe de la mécanique des milieux

continus, c'est-à-dire qu'une contrainte de compression correspond à une valeur de Q négative.

En choisissant σ , p , λ et u pour inconnues principales, le problème se ramène à résoudre le système constitué par (37), (51) et les expressions unidimensionnelles obtenues en projetant l'équation d'équilibre (6) et la loi de conduction (7) sur la verticale:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = (\rho + \rho^f \phi) g = \rho^f g + \frac{1}{A\lambda} \quad (52)$$

$$\text{(avec } A = \left[\left(1 - \frac{\rho^f}{\rho^s} \right) \bar{\varphi}_o g \right]^{-1} \text{)}$$

$$u = -w/\rho^f = k \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho^f g \right) \quad (53)$$

On considérera que la perméabilité peut être caractérisée par une relation du type $k = k(\lambda)$. En pratique, on utilisera la formule de Koseny-Carman:

$$k = k_o \frac{\phi^3}{(1 - \phi)^2} \quad (54)$$

en tenant compte de la relation (44) entre ϕ et λ .

Signalons enfin que l'on peut montrer, compte tenu du fait que la loi de comportement adoptée ici s'écrit en contraintes effectives de Terzaghi, que les champs de contraintes effectives et de dilatation verticale λ sont indépendants de la hauteur d'eau $L(t)$. Dans la suite, on prendra $L(t) = 0$.

2.2 Étude du cas particulier de la perméabilité infinie

On considère d'abord le cas où la perméabilité du milieu est très grande, si bien que la conduction du fluide peut être considérée comme instantanée. Cette hypothèse n'est bien sûr acceptable que si la vitesse de dépôt des sédiments reste faible.

Pour une perméabilité infinie, la loi de Darcy indique que la pression est hydrostatique dans la couche de sédiments:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho^f g \quad (55)$$

Notons que la vitesse du squelette ne peut pas être calculée au moyen de (53). Compte tenu de (52) et de (55), la dérivation de (51) par rapport à la coordonnée verticale z donne:

$$Q'(\lambda) \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \frac{1}{A\lambda} \quad (56)$$

où $Q'(\lambda)$ désigne la dérivée de la fonction $Q(\lambda)$. Il résulte alors de (56) et de la condition $\lambda(z = h(t)) = 1$ que la dilatation volumique est une fonction de la profondeur $\delta = h(t) - z$ à laquelle est située la particule de squelette considérée:

$$\lambda(z, t) = L_\infty(\delta)$$

où la fonction L_∞ est définie par: (57)

$$\int_{L_\infty(\delta)}^1 A \lambda Q'(\lambda) d\lambda = \delta$$

La fonction $Q(\lambda)$ étant croissante, il est facile de voir que la fonction $L_\infty(\delta)$ est une fonction strictement décroissante.

On se convaincra sans peine que les champs de contraintes effectives et de masse volumique apparente du squelette sont, comme la pression du fluide et la dilatation verticale λ dans la couche de sédiments, des fonctions de la seule profondeur δ .

On achève la résolution en calculant l'épaisseur de la couche en fonction de la masse de sédiments déposée: notant $\lambda_{\text{fond}(t)}$ la valeur de λ dans le plan $z = 0$ à l'instant t , on a

$$\begin{aligned} M_d(t) &= \int_{\delta=0}^{\delta=h(t)} \rho(\delta) d\delta \\ &= \int_1^{\lambda_{\text{fond}(t)}} \frac{\rho_o}{\lambda} (-A \lambda \frac{dQ}{d\lambda} d\lambda) \quad (58) \\ &= -A \rho_o Q(\lambda_{\text{fond}(t)}) \end{aligned}$$

Par ailleurs, en utilisant (56)

$$h(t) = \int_{\lambda_{\text{fond}(t)}}^1 A \lambda Q'(\lambda) d\lambda \quad (59)$$

La relation recherchée entre $h(t)$ et $M_d(t)$ est obtenue en éliminant $\lambda_{\text{fond}(t)}$ entre (58) et (59).

Il reste à déterminer la vitesse du squelette (et donc, par (47), le courant relatif de masse fluide w). Considérons une sous-couche de sédiments limitée inférieurement par le plan $z = 0$ et contenant une masse donnée et fixe M_o de squelette. À l'instant t , cette couche est limitée par le plan $z = Z_o(t)$. Il est clair que la vitesse $u(z, t)$ des points matériels de squelette situés à l'instant t dans le plan $z = Z_o(t)$ est égale à $\dot{Z}_o(t)$.

Par dérivation par rapport au temps de l'égalité

$$M_o = \int_{\delta=h(t)-Z_o(t)}^{\delta=h(t)} \rho(\delta) d\delta \quad (60)$$

on obtient:

$$\rho(\delta = h) \dot{h} - \rho(\delta = h - Z_o) (\dot{h} - \dot{Z}_o) = 0 \quad (61)$$

dont on déduit, compte tenu de (43) et en utilisant (59) puis (58):

$$\begin{aligned} \dot{Z}_o &= \left(1 - \frac{\rho(\delta = h)}{\rho(\delta = h - Z_o)} \right) \dot{h} \\ &= - \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{\text{fond}}} \right) A \lambda_{\text{fond}} Q'(\lambda_{\text{fond}}) \dot{\lambda}_{\text{fond}} \quad (62) \\ &= (\lambda_{\text{fond}} - \lambda) \frac{\dot{M}_d}{\rho_o} \end{aligned}$$

La vitesse du squelette est donc finalement donnée par:

$$u(z, t) = (\lambda_{\text{fond}(t)} - \lambda(z, t)) \frac{\dot{M}_d}{\rho_o} \quad (63)$$

2.3 Cas de la perméabilité finie

On suppose désormais que la perméabilité prend une valeur finie, donnée par la formule de Koseny-Carman (54). Dérivant la loi de comportement (51) par rapport à z , et portant dans ce résultat la loi de Darcy (53) et l'équation d'équilibre (52), on obtient au lieu de (56):

$$Q'(\lambda) \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \frac{1}{A\lambda} + \frac{u}{k(\lambda)} \quad (64)$$

Le problème consiste à résoudre (37) et (64) sur le domaine variable $[0, h(t)]$, dont l'évolution est gouvernée par (50), à partir de l'instant initial: on supposera qu'à $t = 0$, la pression du fluide est hydrostatique dans la couche de sédiments.

La résolution proposée ici consiste à mettre en œuvre un calcul numérique par différences finies. À chaque instant, la couche en cours de formation est discrétisée par un nombre variable d'éléments contenant tous la même masse de squelette, dans lesquels la dilatation verticale λ et la vitesse u sont interpolées de manière linéaire, et un élément supplémentaire, de masse inférieure à celle des précédents, correspondant à la partie supérieure de la couche en cours de formation. Bien que son épaisseur et sa masse puissent être négligeables par rapport à celles de l'ensemble du système, cet élément supplémentaire joue un rôle particulier, puisqu'il détermine la condition à la limite «hy-

draulique» pour la couche constituée des éléments situés au-dessous de lui. On s'en tient à un algorithme explicite: l'idée générale consiste à calculer, à partir de la situation à l'instant t , où l'on suppose connues les répartitions de pression et de dilatation dans la couche, le gradient de la pression du fluide et à en déduire, via (53), la vitesse u . On obtient alors l'évolution de la valeur de λ au moyen de (37). On calcule ensuite les contraintes par l'équation d'équilibre (52), puis la pression par la loi de comportement (51). La gestion du caractère ouvert du système étudié, c'est-à-dire l'ajout de nouveaux éléments au fur et à mesure que la masse déposée augmente, ne pose pas de difficulté particulière.

Notons qu'il y a donc deux échelles de temps dans le problème: l'une caractérisant la vitesse de formation de la couche, l'autre caractérisant le phénomène de diffusion du fluide dans la couche déjà formée à l'instant considéré. L'existence d'une double échelle de temps devra être prise en compte pour le choix du pas de temps.

À titre d'illustration, des calculs numériques ont été effectués avec la fonction $Q(\lambda)$ représentée sur la figure 2 — tirée de l'article de Hamilton (1959) — et les valeurs suivantes:

$$\rho^s = 2,31 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\rho_o = 0,6468 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\phi_o = 0,72$$

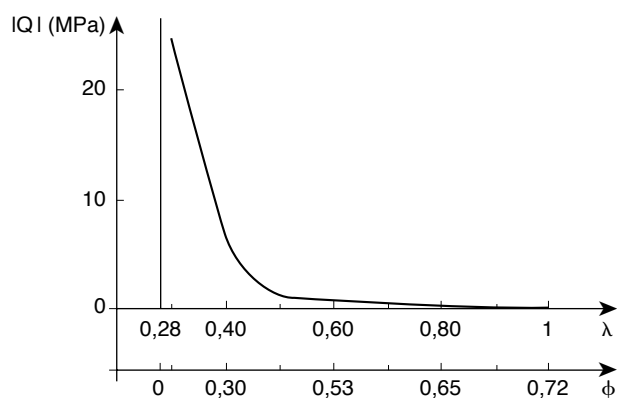


Figure 2

Fonction $Q(\lambda)$ (d'après les données de Hamilton (1959) pour une argile rouge).

Function $Q(\lambda)$ (after the data of Hamilton (1959) for a red clay).

La fonction $Q(\lambda)$ correspond à un comportement fortement non linéaire. Elle rend compte du raidissement progressif du matériau. Notons d'une part, que la pente $Q'(\lambda=1)$ est faible mais non nulle, et d'autre part, que la fonction $Q(\lambda)$ devient infinie lorsque λ tend vers la valeur $1 - \phi_o = 0,28$, c'est-à-dire lorsque la porosité ϕ tend vers zéro (cf. (22)). Certains auteurs, par exemple Schneider *et al.* (1994), introduisent un seuil de porosité au-dessous duquel la porosité ne peut pas diminuer sous l'effet d'un chargement strictement mécanique: le phénomène de pression-dissolution est responsable de la décroissance de la porosité en dessous du seuil en question. La représentation graphique de la fonction $Q(\lambda)$ présente alors une asymptote verticale pour une valeur de λ strictement supérieure à $1 - \phi_o$.

Dans les applications numériques présentées ci-dessous, l'épaisseur initiale de la couche est prise égale à 200 m et la vitesse d'apport de sédiments vaut $2,05 \cdot 10^{-9} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$, ce qui correspondrait à une augmentation d'épaisseur de 100 m par million d'années en l'absence de pesanteur (donc de compaction). On étudie dans la suite l'influence de la perméabilité du milieu, c'est-à-dire du paramètre k_o sur la pression du fluide dans la couche au cours du temps.

Les figures 3 et 4 donnent respectivement la porosité du milieu et la pression du fluide en fonction de la profondeur au bout de (a) 18 Ma, (b) 36 Ma, (c) 54 Ma et (d) 72 Ma. Les courbes en trait pointillé correspondent à $k_o = 5 \cdot 10^{-16} \text{ Pa}^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (soit 500 nD); les courbes en trait plein à $k_o = 5 \cdot 10^{-14} \text{ Pa}^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (soit 50 μD). La figure 5 compare l'évolution de l'épaisseur de la couche en fonction du temps pour les deux valeurs du paramètre k_o .

Si la perméabilité du milieu est grande, la pression du fluide demeure hydrostatique, et la porosité à une profondeur donnée est indépendante du temps, conformément à l'analyse menée au paragraphe 2.2. En revanche, si k_o prend une valeur suffisamment faible, il apparaît un écart significatif entre la répartition de pression dans la couche et la répartition hydrostatique (fig. 4), et le profil de porosité change sensiblement (fig. 3): en particulier, sa concavité peut s'inverser. On observe d'autre part (fig. 5) que la compaction est plus importante dans le bassin le plus perméable, comme on pouvait s'y attendre.

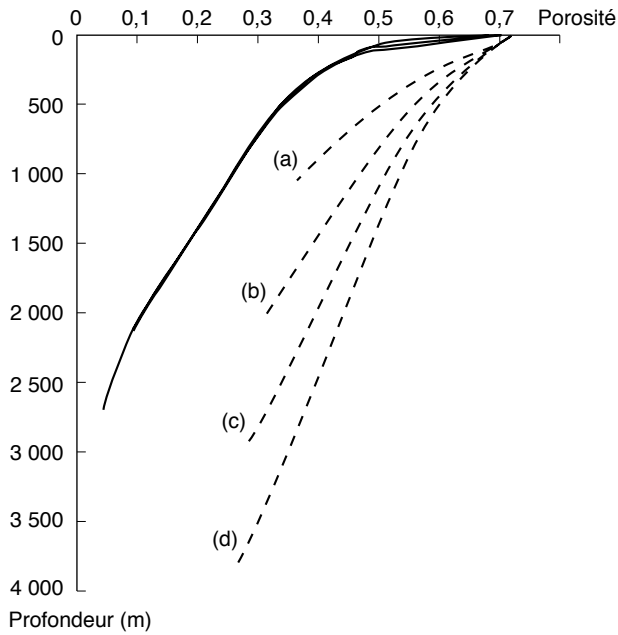


Figure 3
Porosité ϕ en fonction de la profondeur.
Porosity ϕ vs. depth.

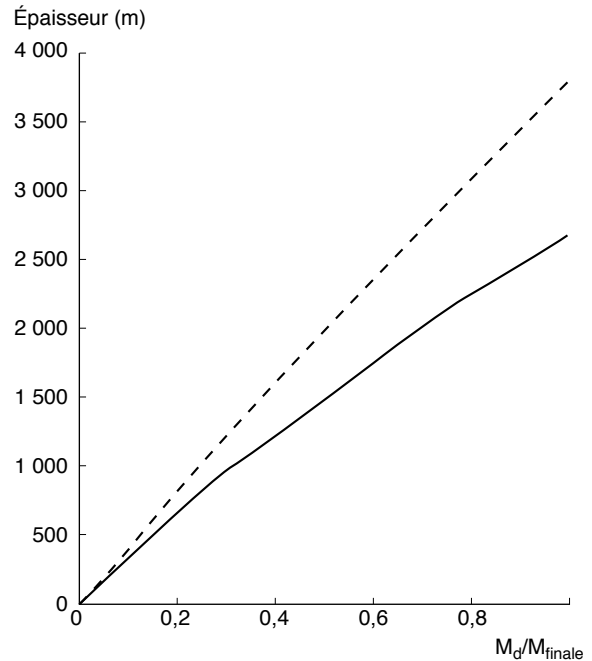


Figure 5
Épaisseur globale de la couche en fonction de la masse de
sédiments déposés. (La masse totale déposée, notée M_{finale}
correspond à 72 Ma de sédimentation).
Thickness of the layer vs. mass of sediments deposited.
The mass M_{finale} corresponds to 72 Myear of sedimentation.

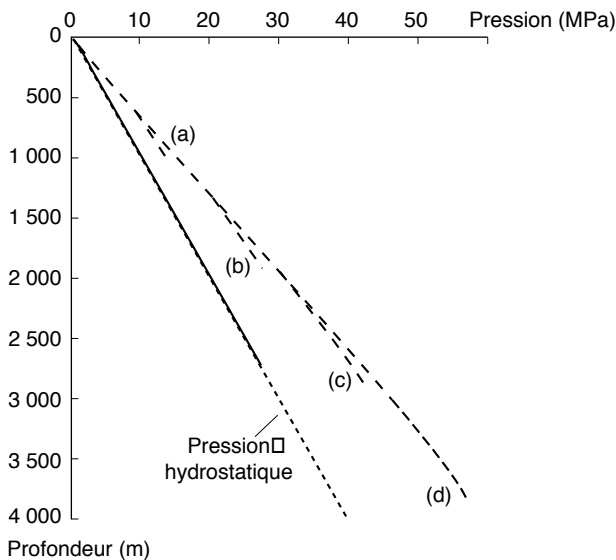


Figure 4
Pression p en fonction de la profondeur.
Pore pressure p vs. depth.

2.4 Influence des non-linéarités géométriques dans le problème de la compaction des sédiments

L'analyse du problème de la compaction présentée ci-dessus prend d'emblée en compte le caractère fini de la transformation géométrique du squelette, et surmonte la difficulté liée au caractère ouvert du système considéré, qui empêche d'introduire une configuration de référence fixe en introduisant un état initial correspondant à l'état du squelette à la surface et servant de référence pour définir les déformations. On se propose ici de mettre en évidence le rôle des non-linéarités strictement géométriques, c'est-à-dire liées au fait que les déformations ne sont pas infinitésimales.

La transformation géométrique du squelette est dite infinitésimale si le tenseur \underline{F} est voisin du tenseur unité $\underline{1}$. Dans le problème de la compaction unidimensionnelle,

cette hypothèse s'exprime de la façon suivante (voir (36)):

$$|\lambda - 1| \ll 1 \quad (65)$$

Lorsque cette hypothèse est vérifiée, on définit la déformation linéarisée ε par $\varepsilon = \lambda - 1$, et l'on procède aux linéarisations suivantes: on écrit (37) sous la forme:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (66)$$

et (43) sous la forme:

$$\rho = \rho_o (1 - \varepsilon) \quad (67)$$

L'expression de la conservation de la masse de squelette $J(1 - \phi) = (1 - \phi_o)$, après différentiation et linéarisation, est remplacée par la relation suivante:

$$(1 - \phi) = (1 - \phi_o)(1 - \varepsilon) \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\phi}/(1 - \phi_o) \quad (68)$$

Enfin, l'équation d'équilibre (52) devient:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \rho^f g + \frac{1}{A}(1 - \varepsilon) \quad (69)$$

Le reste de la formulation du problème demeure inchangé; en particulier, on conserve la même fonction Q que précédemment. Du point de vue numérique, la résolution est très peu modifiée: on utilise à nouveau une discrétisation formée d'éléments contenant une masse de squelette donnée et dont la déformation est prise en compte lors de l'intégration des équations de champ eulériennes, bien que ce ne soit en général pas le cas dans une formulation linéarisée.

On présente ci-dessous la comparaison entre les résultats obtenus par les deux formulations, pour les mêmes données qu'au paragraphe 2.3 et dans le cas du bassin le moins perméable. Les courbes en trait pointillé représentent les résultats des calculs menés sans linéarisation, les courbes en trait plein représentent les résultats obtenus dans le cadre linéarisé présenté ci-dessus. L'importance d'une prise en compte complète des non-linéarités géométriques apparaît clairement: si les résultats sont peu modifiés en ce qui concerne les calculs de la pression dans la couche et l'évolution de l'épaisseur globale au cours du temps (fig. 6 et 7), l'estimation de la valeur de la porosité dans la couche est en revanche sensiblement dégradée (fig. 8). Cet exemple simple illustre la difficulté de linéariser l'une ou l'autre équation sans risquer d'induire une erreur sensible sur au moins une partie du résultat.

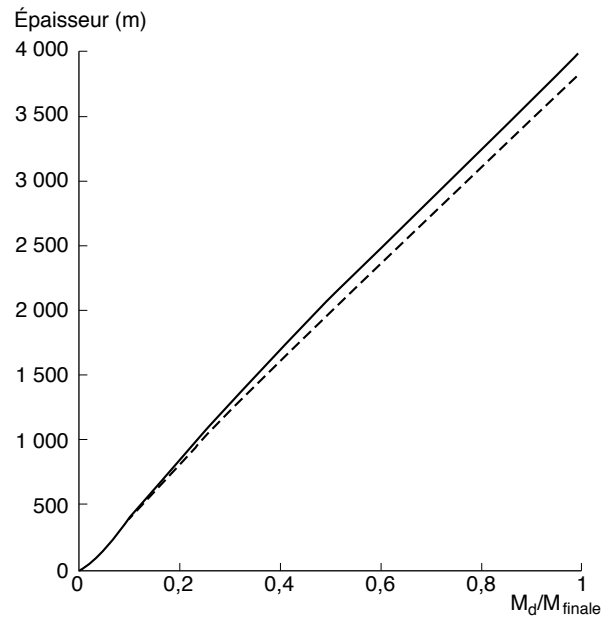


Figure 6

Épaisseur globale de la couche en fonction de la masse de sédiments déposés. (La masse M_{finale} correspond à 72 Ma de sédimentation).

Thickness of the layer vs. mass of sediments deposited.

M_{finale} denotes the mass deposited after 72 Myear.

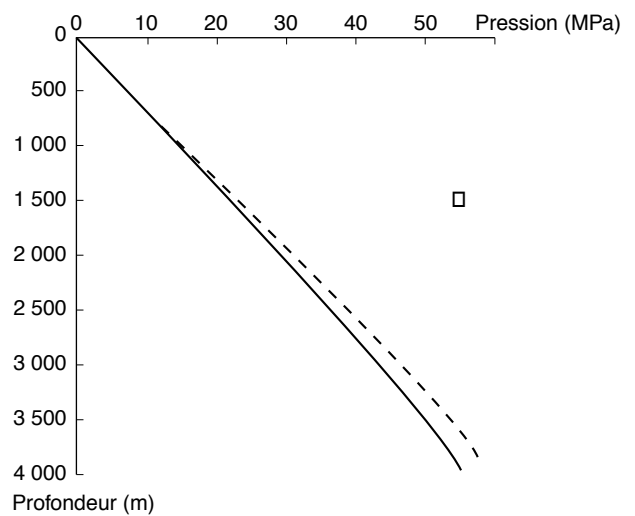


Figure 7

Pression p en fonction de la profondeur (après 72 Ma).

Pore pressure p vs. depth (after 72 Myear).

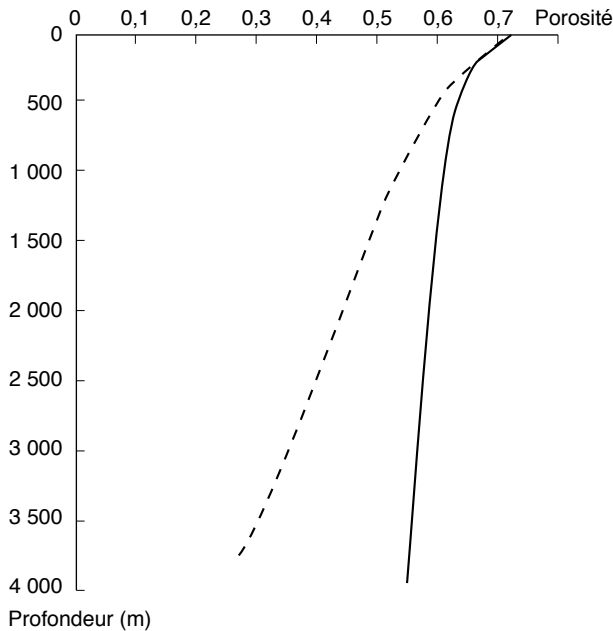


Figure 8

Porosité ϕ en fonction de la profondeur (après 72 Ma).
Porosity ϕ vs. depth (after 72 Myear).

CONCLUSION - PERSPECTIVES

L'étude théorique du comportement poroélastique en transformation finie a permis de justifier la formulation en contraintes effectives de ce type de loi de comportement dans le cas particulier de l'incompressibilité du solide constituant le squelette. À la différence d'une approche prenant en compte les non-linéarités de comportement mais négligeant les non-linéarités géométriques, l'étude de la compaction qui vient d'être exposée ne linéarise pas la relation (37) entre vitesse du squelette et dilatation, en général écrite sous la forme (66), ni l'équation de continuité du squelette (43), en général écrite sous la forme (67).

Quelques interrogations subsistent cependant. Il faut d'abord souligner l'importance de l'hypothèse d'incompressibilité du solide. En particulier, aucun argument de nature théorique n'a pu être apporté pour justifier le recours à une contrainte effective généralisée de la forme $\underline{\sigma} + b p \underline{1}$ (en général associée à une compressibilité du solide) dans une formulation de type poroélastique non-linéaire en grande transformation. Par ailleurs, il convient de garder à l'esprit que la justification fournie dans le cas incompressible fait explicitement appel à l'hypothèse de comportement élastique, à laquelle les géomatériaux se conforment évidemment bien mal. C'est pourquoi il serait souhaitable de développer une approche élastoplastique en transformation finie du problème de la compaction.

RÉFÉRENCES

- Athy L.F. (1930), Density, porosity and compaction of sedimentary rocks. *AAPG Bull.*, **14**, 1, p. 1-24.
- Biot M.A. (1955), Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *Journal of Applied Physics*, **26**, p. 182-185.
- Bourgeois E. et L. Dormieux (1996), Consolidation of a nonlinear poroelastic layer in finite deformations. *Eur. J. Mechanics A/Solids*, **15**, 4, p. 575-598.
- Coussy O. (1991), *Mécanique des milieux poreux*. Éditions Technip, Paris.
- Hamilton E.L. (1959), Thickness and consolidation of deep-sea sediments. *Bulletin of the geological society of America*, **70**, p. 1399-1424.
- Hedberg H.D. (1936), Gravitational Compaction of clays and shales. *American Journal of Science*, **31**, 184, p. 241-287.
- Hubbert M.K. et W.W. Rubey (1959), Role of fluid pressure in mechanics of fluid-filled porous solids and application to overthrust faulting. *Geol. Soc. Am. Bull.*, **70**, p. 115-166.
- Schneider F., J.L. Potdevin, S. Wolf et I. Faille (1994), Modèle de compaction élastoplastique et viscoplastique pour simulateur de bassins sédimentaires. *Revue de l'Institut français du pétrole*, **49**, 2, p. 141-148.
- Smith J.E. (1971), The dynamics of shale compaction and evolution of pore fluid pressure. *Mathematical Geology*, **3**, p. 239-263.
- Terzaghi K. (1923), Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der Hydrodynamischen Spannungserscheinungen. *Szgeber Akad. Wiss. Wien, Math-Naturwiss Klasse IIa*, **132**, 3-4, p. 125-138.

Manuscrit définitif reçu en septembre 1996